绵阳市高中 2019 级第三次诊断性考试

文科数学参考答案及评分意见

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分.

BDCCD　　ABBAC　　DC

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13．2　　14．-10　　15．93　　16．3

三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分.

17．解：（1）∵ $b\cdot\cos A=2a\cdot\cos B$，

由正弦定理得 $\sin B\cdot\cos A=2\sin A\cdot\cos B$，

即 $\tan B=2\tan A$. ……………………………………………………2 分

∵ $\tan C=-3$，$A+B+C=\pi$，

∴ $\tan C=\tan[\pi-(A+B)]=-\tan(A+B)=-\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\cdot\tan B}=\dfrac{3\tan B}{\tan^2 B-2}=-3$，

解得 $\tan B=1$ 或 -2.

∵ $\tan C=-3$，

∴ C 为钝角，B 为锐角，

∴ $\tan B=1$，即 $B=\dfrac{\pi}{4}$. ……………………………………………………6

分

（2）∵ $\tan C=-3$，

∴ $\sin C=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$，$\cos C=-\dfrac{\sqrt{10}}{10}$. ……………………………………8 分

∵ $A+B+C=\pi$，∴ $A=\pi-(B+C)$，

∴ $\sin A=\sin[\pi-(B+C)]=\sin(B+C)=\sin B\cdot\cos C+\cos B\cdot\sin C$

$=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times(-\dfrac{\sqrt{10}}{10})+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{3\sqrt{10}}{10}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. ………10 分

由正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$，得 $a=\dfrac{c\cdot\sin A}{\sin C}$.

∵ $c=3$，

∴ $a=3\times\dfrac{\sqrt{5}}{5}\times\dfrac{10}{3\sqrt{10}}=\sqrt{2}$.

$\therefore \triangle ABC$ 的面积 $S=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{2}\times 3\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{3}{2}$． ……………………12 分

18．**解**：（1）$\because \overline{x}=\dfrac{1+2+3+4+5+6}{6}=3.50$，$\therefore \sum\limits_{i=1}^{6}(x_i-\overline{x})^2=17.5$，

$\therefore \hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{6}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum\limits_{i=1}^{6}(x_i-\overline{x})^2}=\dfrac{841}{17.5}\approx 48$． ……………………………………3 分

又 $\overline{y}=144$ ，$\therefore \hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}=144-48\times 3.5=-24$，

$\therefore y$ 关于 x 的线性回归方程为 $\hat{y}=48x-24$． ……………………………………5 分

（2）若利用线性回归模型，可得 2022 年我国新能源乘用车的年销售量的预测值为

$\hat{y}=48\times 7-24=312$（万辆）． ……………………………………………7 分

若利用模型 $\hat{y}=\mathrm{e}^{3.63+0.33x}$，可得 2022 年我国新能源乘用车的年销售量的预测值为

$\hat{y}=\mathrm{e}^{3.63+0.33\times 7}=\mathrm{e}^{5.94}=380$（万辆）． ……………………………………9 分

（3）$\because$0.71<0.87，且 R^2 越大，反映残差平方和越小，模型的拟合效果越好，

$\therefore$用模型 $\hat{y}=37.71e^{0.33x}$ 得到的预测值更可靠． ……………………………12 分

19．**解**：（1）证明：设点 M 为 BC 的中点，连接 PM，MA．

由题意得 $PM\perp BC$，且 PM=1．

$\therefore$在$\triangle ABM$ 中，可得 $MA=\sqrt{3}$，且 $MA\perp BC$．

又 $MC//AD$，且 $MC=AD=1$，则四边形 $AMCD$ 为矩形，

$\therefore AM//CD$． ……………………………………………………3 分

在$\triangle PAM$ 中，可得 $PA^2=AM^2+PM^2$，

$\therefore PM\perp MA$，即 $PM\perp CD$．

又 $BC\perp CD$，$PM\cap BC=M$，直线 PM，BC 均在平面 PBC 内，

$\therefore CD\perp$平面PBC． ……………………………………………………6 分

（2）由（1）知 $CD\perp$平面PBC，而直线 CD 在平面 $ABCD$ 内，

$\therefore$平面$ABCD\perp$平面PBC． ……………………………………………8 分

设点 Q 到平面 PBC 的距离为 h_Q．

$\therefore V_{B-PQC}=V_{Q-PBC}=\dfrac{1}{3}S_{\Delta PBC}\cdot h_Q=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$，

$\therefore \dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}\cdot h_Q=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$． $\therefore$解得 $h_Q=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$． ……………………………10分

$\therefore$点 Q 为线段 AB 的中点，

在△QBC 中，BC=2，$\angle QBC$=60°，$QB=1$，

易得：$\angle BCQ$=30°． ……………………………………………………12分

20．**解**：（1） $f'(x)=\ln x-a$．

令 $f'(x)>0$，解得 $x>e^a$， $f'(x)<0$，解得 $0<x<e^a$．

$\therefore$函数 $f(x)$在区间 $(0，e^a)$ 上单调递减，在区间 $(e^a,+\infty)$ 上单调递增． …………3分

当 $x\to 0$ 时，$f(x)\to 1$；当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)=x[\ln x-(a+1)]+1\to+\infty$．

$\therefore$要使得 $f(x)$有 2 个零点，则 $f(e^a)=1-e^a<0$，

解得 a>0． ………………………………………………………………6分

（2）由题意得 $f'(x)=\ln x-a$，$x\in[1，e]$， $\ln x\in[0,1]$．

① 当 a≤0 时， $f'(x)$≥0 恒成立，函数 $f(x)$在区间[1，e]上单调递增．

$\therefore$最大值 $f(e)=1-ae=-2$，最小值 $f(1)=-a=1-2e$，无解． ……………………………8分

② 当 a≥1 时， $f'(x)$≤0 恒成立，函数 $f(x)$在区间[1，e]上单调递减．

$\therefore$最大值 $f(1)=-a=-2$，最小值 $f(e)=1-ae=1-2e$，解得 a=2，满足 a≥1． …………10分

③当 0<a<1 时，由 $f'(x)>0$，解得 $e^a<x\leqslant e$， $f'(x)<0$，解得 $1\leqslant x<e^a$．

$\therefore$函数 $f(x)$在区间 $[1，e^a)$ 上单调递减，在区间 $(e^a，e]$ 上单调递增．

$\therefore$最小值 $f(e^a)=1-e^a=1-2e$，解得 $a=1+\ln 2>1$，不满足题意．

综上，a=2． ……………………………………………………………12分

21．**解**：（1）$\because e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$a^2=b^2+c^2$，$\therefore a^2=2b^2$． ……………………………2分

$\therefore |AB|=\dfrac{2a^2}{b^2}=4$，由题意可得 A 点坐标为$(\sqrt{2},\sqrt{2})$

则代入椭圆方程得 $\dfrac{2}{a^2}+\dfrac{2}{b^2}=1$．

联立解得 $b^2=3$， $a^2=6$． $\therefore$椭圆 E 的方程为 $\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{3}=1$． ………………………5分

（2）联立$\begin{cases} y=x+m, \\ \dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{3}=1, \end{cases}$消 y 整理得 $3x^2+4mx+2m^2-6=0$．

由 $\Delta=16m^2-12(2m^2-6)>0$，解得 $-3<m<3$．

由韦达定理得 $x_1+x_2=-\dfrac{4m}{3}$，①　　$x_1\cdot x_2=\dfrac{2m^2-6}{3}$．②　　……………………………7 分

若存在点 P，使得 $|AP|=|AB|$，$AP\perp AB$，则 $P(\dfrac{14}{3}, y_2)$．

且直线 AP 的斜率为 $k=\dfrac{y_2-y_1}{\dfrac{14}{3}-x_1}=\dfrac{x_2-x_1}{\dfrac{14}{3}-x_1}=-1$，即 $x_2=2x_1-\dfrac{14}{3}$．③　……………………9 分

联立①②③得 $11m^2+28m+17=0$，解得 $m=-1$ 或 $-\dfrac{17}{11}$．

$\therefore$ 存在点 P 满足题意，此时 $m=-1$ 或 $-\dfrac{17}{11}$．…………………………………………………12 分

22．**解**：（1）将直线 l 的参数方程消参，得直线 l 的普通方程为：$x+y=\dfrac{4}{3}$．

$\because$ $\rho^2=x^2+y^2$，$\rho\cos\theta=x$，$\rho\sin\theta=y$，

又 $x^2+y^2=|x|+|y|$，$\therefore$ $\rho^2=|\rho\cos\theta|+|\rho\sin\theta|$，

$\therefore$ 曲线 C 的极坐标方程为：$\rho=|\cos\theta|+|\sin\theta|$．　　……………………5 分

（2）联立 $\begin{cases}\theta=\alpha, & \alpha\in[0,\dfrac{\pi}{2}]\\ \rho=|\cos\theta|+|\sin\theta|,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}\theta=\alpha,\\ \rho=\cos\alpha+\sin\alpha.\end{cases}$

$\therefore$ 点 B 的坐标为 $(\cos\alpha+\sin\alpha, \alpha)$．……………………………………………………………7 分

由题意得直线 l 的极坐标方程为 $\rho\cos\theta+\rho\sin\theta=\dfrac{4}{3}$．

联立 $\begin{cases}\theta=\alpha,\\ \rho\cos\theta+\rho\sin\theta=\dfrac{4}{3},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}\theta=\alpha,\\ \rho=\dfrac{4}{3(\cos\theta+\sin\theta)}.\end{cases}$

$\therefore$ 点 A 的坐标为 $(\dfrac{4}{3(\cos\alpha+\sin\alpha)}, \alpha)$．……………………………………………………8 分

$\therefore$ $\dfrac{|OA|}{|OB|}=\dfrac{4}{3(\cos\alpha+\sin\alpha)(\cos\alpha+\sin\alpha)}=\dfrac{4}{3(1+\sin2\alpha)}$．

$\because$ $0\leqslant\alpha\leqslant\dfrac{\pi}{2}$，$\therefore$ $0\leqslant2\alpha\leqslant\pi$，$\therefore$ $0\leqslant\sin2\alpha\leqslant1$，

$\therefore$ $\dfrac{1}{2}\leqslant\dfrac{1}{1+\sin2\alpha}\leqslant1$，$\therefore$ $\dfrac{2}{3}\leqslant\dfrac{4}{3(1+\sin2\alpha)}\leqslant\dfrac{4}{3}$．

$\therefore$ $\dfrac{2}{3}\leqslant\dfrac{|OA|}{|OB|}\leqslant\dfrac{4}{3}$，即 $\dfrac{|OA|}{|OB|}$ 的取值范围是 $[\dfrac{2}{3},\dfrac{4}{3}]$．……………………………………10 分

23．**解**：①当 $x\leqslant 1$ 时，不等式等价于 $3-2x\geqslant x+1$，解得 $x\leqslant\frac{2}{3}$，综合，$x\leqslant\frac{2}{3}$；

当 $1<x<2$ 时，不等式等价于 $1\geqslant x+1$，解得 $x\leqslant 0$，综合，无解；

当 $x\geqslant 2$ 时，不等式等价于 $2x-3\geqslant x+1$，解得 $x\geqslant 4$，综合，$x\geqslant 4$；

综上，不等式的解集为 $\{x\,|\,x\leqslant\frac{2}{3}或x\geqslant 4\}$．……………………………………………5 分

（2）证明：不等式等价于 $\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\leqslant\frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}$，

要证 $\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\leqslant\frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}$，只要证 $\frac{1+|a+b|}{|a+b|}\geqslant\frac{1+|a|+|b|}{|a|+|b|}$，

只要证 $\frac{1}{|a+b|}\geqslant\frac{1}{|a|+|b|}$，只要证 $|a+b|\leqslant|a|+|b|$，

上式显然成立，所以原不等式成立．………………………………………………………10 分