秘密 ★ 启用前 【考试时间：2022 年 4 月 19 日 15：00—17：00】

# 绵阳市高中 2019 级第三次诊断性考试

# 理科数学

**注意事项：**

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3. 考试结束后，将答题卡交回。

**一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。**

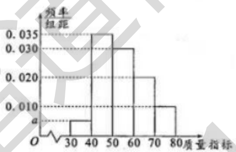
1. 若复数 $z=(2-i)(4-i)$，则 $z$ 的共轭复数为

A. $-7-6i$　　B. $-7+6i$　　C. $7-6i$　　D. $7+6i$

2. 已知集合 $A=\{x|x^2<1\}$，$B=\{x|e^x<2\}$，则 $A\cap B=$

A. $(-1, 1)$　　B. $(-1, \ln2)$　　C. $(0, \ln2)$　　D. $(\ln2, 1)$

3. 某车间从生产的一批产品中随机抽取了 1000 个零件进行一项质量指标的检测，整理检测结果得此项质量指标的频率分布直方图如图所示，则下列结论错误的是




A. $a=0.005$

B. 估计这批产品该项质量指标的众数为 45

C. 估计这批产品该项质量指标的中位数为 60

D. 从这批产品中随机选取 1 个零件，其质量指标在[50，70)的概率约为 0.5

4. 已知 $\alpha$，$\beta$ 是两个不同的平面，$m$ 是一条直线，若 $m\perp\beta$，则“$m//\alpha$”是“$\alpha\perp\beta$”的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分又不必要条件

5. 已知函数 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$，则

A. $f(x)$在$(-1, +\infty)$上单调递增　　B. $f(x)$的图象关于点$(-1, 1)$对称

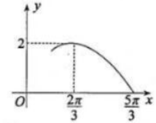
C. $f(x)$为奇函数　　D. $f(x)$的图象关于直线 $y=x$ 对称



6. 已知抛物线 $x^2=2py\,(p>0)$的焦点为 $F$，直线 $l$：$2\sqrt{3}x-2y+p=0$ 与抛物线交于 $A$，$B$ 两点，且$|AF|=3+|BF|$，则$|AB|=$

A. $2\sqrt{3}$　　B. $\sqrt{3}$　　C. 2　　D. 4

7. 函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\ \omega>0,\ |\varphi|<\frac{\pi}{2})$的部分图象如图所示，将函数 $y=f(x)$的图象向右平移$\frac{\pi}{3}$个单位得到函数 $y=g(x)$的图像，则 $g(\frac{\pi}{3})=$




A. $\frac{1}{2}$　　B. 1

C. $\sqrt{2}$　　D. $\sqrt{3}$

8. 在 2022 年北京冬奥会开幕式上，二十四节气倒计时惊艳亮相，与节气相配的 14 句古诗词，将中国人独有的浪漫传达给了全世界．我国古代天文学和数学著作《周髀算经》中记载：一年有二十四个节气，每个节气的晷长损益相同（晷是按照日影测定时刻的仪器，晷长即为所测量影子的长度），二十四节气及晷长变化如图所示，相邻两个节气晷长减少或增加的量相同，周而复始．已知雨水的晷长为 9.5 尺，立冬的晷长为 10.5 尺，则冬至所对的晷长为


A. 11.5 尺　　B. 13.5 尺

C. 12.5 尺　　D. 14.5 尺

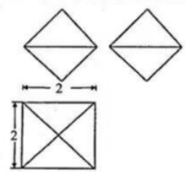
9. 已知曲线 $y=x^3-x^2+x+2$ 在 $x=1$ 处的切线为 $l$，若 $l$ 与⊙$C$：$x^2+y^2-2ax+a^2-5=0$ 相交，则实数 $a$ 的取值范围是

A. $(-3, 2)$　　B. $(-2, 3)$　　C. $(-6, 4)$　　D. $(0, 2)$

10. 将 5 名支援某地区抗疫的医生分配到 $A$、$B$、$C$ 三所医院，要求每所医院至少安排 1 人，则其中甲、乙两医生恰分配到相同医院的概率为

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{6}{25}$　　C. $\frac{7}{16}$　　D. $\frac{4}{9}$

11. 某几何体的三视图如图所示，其中正视图与侧视图均为正方形．将该几何体完全放置在一个球内，则满足条件的球的最小体积为




A. $\frac{4}{3}\pi$　　B. $8\pi$

C. $\frac{32\pi}{3}$　　D. $\frac{8\sqrt{2}\pi}{3}$

12. 在给出的① $\sqrt{e}\cdot\ln2<1$；② $e^{\frac{3}{2}}\ln3>\frac{9}{2}$；③ $e^{0.2}>\ln3$．三个不等式中，正确的个数为

A. 0 个　　B. 1 个　　C. 2 个　　D. 3 个

二、填空题：本大题共4小题，每小题5分，共20分．

13. 已知双曲线 $C$：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（其中 $a>0$，$b>0$）的焦距为 $4\sqrt{5}$，其中一条渐近线的斜率为2，则 $a=$_______．

14. 在等边△$ABC$ 中，$AB=4$，$\overrightarrow{BC}=4\overrightarrow{BD}$，则 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CA}=$_______．

15. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和为 $S_n$，若 $a_1=1$，$a_{n+1}=S_n+5$，则 $S_5=$_______．

16. 在棱长为3的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，已知点 $P$ 为棱 $AA_1$ 上靠近于点 $A_1$ 的三等分点，点 $Q$ 为棱 $CD$ 上一动点．若 $M$ 为平面 $D_1PQ$ 与平面 $ABB_1A_1$ 的公共点，$N$ 为平面 $D_1PQ$ 与平面 $ABCD$ 的公共点，且点 $M$，$N$ 都在正方体的表面上，则由所有满足条件的点 $M$，$N$ 构成的区域的面积之和为_______．

三、解答题：共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第17~21题为必考题，每个试题考生都必须作答。第22、23题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：共60分。

17.（12分）

在△$ABC$ 中，角 $A$，$B$，$C$ 所对的边为 $a$，$b$，$c$，已知 $b\cdot\cos A=2a\cdot\cos B$，且 $\tan C=-3$．

（1）求角 $B$ 的大小；

（2）若 $c=3$，求△$ABC$ 的面积 $S$．

18.（12分）

随着科技进步，近年来，我国新能源汽车产业迅速发展．以下是中国汽车工业协会2022年2月公布的近六年我国新能源乘用车的年销售量数据：

| 年　份 | 2016 | 2017 | 2018 | 2019 | 2020 | 2021 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 年份代码 $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 新能源乘用车年销量 $y$(万辆) | 50 | 78 | 126 | 121 | 137 | 352 |

（1）根据表中数据，求出 $y$ 关于 $x$ 的线性回归方程；（结果保留整数）

（2）若用 $y=me^{nx}$ 模型拟合 $y$ 与 $x$ 的关系，可得回归方程为 $\hat{y}=37.71e^{0.33x}$，经计算该模型和第（1）问中模型的 $R^2$（$R^2$ 为相关指数）分别为0.87和0.71，请分别利用这两个模型，求2022年我国新能源乘用车的年销售量的预测值；

（3）你认为（2）中用哪个模型得到的预测值更可靠？请说明理由．

参考数据：设 $u=\ln y$，其中 $u_i=\ln y_i$．

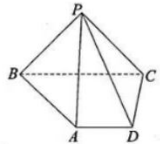
| $\bar{y}$ | $\bar{u}$ | $\sum_{i=1}^{6}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})$ | $\sum_{i=1}^{6}(x_i-\bar{x})(u_i-\bar{u})$ | $e^{3.63}$ | $e^{5.94}$ | $e^{6.27}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 144 | 4.78 | 841 | 5.70 | 37.71 | 380 | 528 |

参考公式：对于一组具有线性相关关系的数据 $(x_i,y_i)(i=1,2,3,\dots,n)$，其回归直线 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$ 的斜率和截距的最小二乘估计公式分别为 $\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$，$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}$．



19.（12分）

在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为梯形，已知 $AD//BC$，$\angle BAD=120°$，$AB=BC=PA=2AD=2$，△$PBC$ 是以 $BC$ 为斜边的等腰直角三角形．




（1）证明：$PB\perp$ 平面 $PCD$；

（2）求二面角 $B-PA-D$ 的平面角的余弦值．

20.（12分）

已知椭圆 $E$：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（其中 $a>b>0$）的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，直线 $y=x+m$ 与 $E$ 交于 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ 两点，且 $x_1>x_2$，当 $m=0$ 时，$|AB|=\frac{2a^2}{b^2}$．

（1）求椭圆 $E$ 的方程；

（2）在直线 $x=\frac{14}{3}$ 上是否存在点 $P$，使得 $|AP|=|AB|$，$AP\perp AB$，若存在，求出 $m$ 的值；若不存在，请说明理由．

21.（12分）

函数 $f(x)=x\ln x-(a+1)x+1$．

（1）若函数 $f(x)$ 有2个零点，求实数 $a$ 的取值范围；

（2）若函数 $f(x)$ 在区间[1，e]上最大值为 $m$，最小值为 $n$，求 $m-n$ 的最小值．

（二）选考题：共10分。请考生在第22、23题中任选一题做答。如果多做，则按所做的第一题记分。

22.【选修4—4：坐标系与参数方程】（10分）

在直角坐标系 $xOy$ 中，直线 $l$ 的参数方程为 $\begin{cases}x=\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{2}}{2}t,\\ y=\frac{2}{3}+\frac{\sqrt{2}}{2}t,\end{cases}$（$t$ 为参数），曲线 $C$ 的方程为 $x^2+y^2=|x|+|y|$．以坐标原点为极点，$x$ 轴正半轴为极轴建立极坐标系，射线 $E$ 的极坐标方程为 $\theta=\alpha$，$\alpha\in[0,\frac{\pi}{2}]$．

（1）求直线 $l$ 的普通方程和曲线 $C$ 的极坐标方程；

（2）若 $E$ 与 $l$ 交于点 $A$，$E$ 与 $C$ 交于点 $B$，求 $\frac{|OA|}{|OB|}$ 的取值范围．

23.【选修4—5：不等式选讲】（10分）

已知函数 $f(x)=|x|$．

（1）求关于 $x$ 的不等式 $f(x-1)+f(x-2)\geqslant x+1$ 的解集；

（2）求证：$\frac{f(a+b)}{1+f(a+b)}\leqslant\frac{f(a)+f(b)}{1+f(a)+f(b)}$．