

绵阳市高中 2019 级第三次诊断性考试

理科数学参考答案及评分意见

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。

DBCAD ABBAB DC

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 2 4. -10 15. 91 16. $\frac{19}{2}$

三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分。

17. 解：(1) $\because b \cdot \cos A = 2a \cdot \cos B$,

由正弦定理得 $\sin B \cdot \cos A = 2 \sin A \cdot \cos B$,

即 $\tan B = 2 \tan A$2 分

$\because \tan C = -3, A+B+C=\pi$,

$$\therefore \tan C = \tan[\pi - (A+B)] = -\tan(A+B) = -\frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \cdot \tan B} = \frac{3 \tan B}{\tan^2 B - 2} = -3,$$

解得 $\tan B = 1$ 或 -2 .

$\because \tan C = -3$,

$\therefore C$ 为钝角, B 为锐角,

$\therefore \tan B = 1$, 即 $B = \frac{\pi}{4}$6 分

分

(2) $\because \tan C = -3$,

$$\therefore \sin C = \frac{3\sqrt{10}}{10}, \cos C = -\frac{\sqrt{10}}{10}. \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$\because A+B+C=\pi, \therefore A=\pi-(B+C)$,

$$\begin{aligned} \therefore \sin A &= \sin[\pi - (B+C)] = \sin(B+C) = \sin B \cdot \cos C + \cos B \cdot \sin C \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \left(-\frac{\sqrt{10}}{10}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{3\sqrt{10}}{10} = \frac{\sqrt{5}}{5}. \dots\dots\dots 10 \text{ 分} \end{aligned}$$

由正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$, 得 $a = \frac{c \cdot \sin A}{\sin C}$.

$\because c=3$,

$$\therefore a = 3 \times \frac{\sqrt{5}}{5} \times \frac{10}{3\sqrt{10}} = \sqrt{2}.$$

$\therefore \triangle ABC$ 的面积 $S = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times 3 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3}{2}$12 分

18. 解: (1) $\therefore \bar{x} = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = 3.50$, $\therefore \sum_{i=1}^6 (x_i - \bar{x})^2 = 17.5$,

$\therefore \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^6 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^6 (x_i - \bar{x})^2} = \frac{841}{17.5} \approx 48$3 分

又 $\bar{y} = 144$, $\therefore \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} = 144 - 48 \times 3.5 = -24$.

$\therefore y$ 关于 x 的线性回归方程为 $\hat{y} = 48x - 24$5 分

分

(2) 若利用线性回归模型, 可得 2022 年我国新能源乘用车的年销售量的预测值为 $\hat{y} = 48 \times 7 - 24 = 312$ (万辆).7 分

分

若利用模型 $\hat{y} = 37.71e^{0.33x}$, 则 $\ln y = 3.63 + 0.33x$,

即 $\hat{y} = e^{3.63+0.33x}$.

\therefore 2022 年我国新能源乘用车的年销售量的

预测值为 $\hat{y} = e^{3.63+0.33 \times 7} = e^{5.94} \approx 380$ (万辆).9 分

分

(3) $\because 0.71 < 0.87$, 且 R^2 越大, 反映残差平方和越小, 模型的拟合效果越好,

\therefore 用模型 $\hat{y} = 37.71e^{0.33x}$ 得到的预测值更可靠.12 分

19. 解: (1) 证明: 设点 M 为 BC 的中点, 连接 PM, MA .

$\therefore PM \perp BC$, 且 $PM=1$.

在 $\triangle ABM$ 中, 可得 $MA = \sqrt{3}$, 且 $MA \perp BC$,

又 $MC \parallel AD$, 且 $MC = AD = 1$,

\therefore 四边形 $AMCD$ 为矩形,

$\therefore AM \parallel CD$2 分

在 $\triangle PAM$ 中, 可得 $PA^2 = AM^2 + PM^2$,

$\therefore PM \perp MA$, 即 $PM \perp CD$.

又 $BC \perp CD$, $PM \cap BC = M$, 直线 PM, BC 均在平面 PBC 内,

$\therefore CD \perp$ 平面 PBC4 分
 又 $PB \subseteq$ 平面 PBC ,
 $\therefore PB \perp CD$,
 又 $PB \perp PC$, $PC \cap CD = C$,
 $\therefore PB \perp$ 平面 PCD6

分

(2) 以 M 为坐标原点, 分别以 MA, MC, MP 为 x 轴, y 轴, z 轴建立如图所示的空间直角坐标系 $M-xyz$.

由题意得 $M(0, 0, 0), A(\sqrt{3}, 0, 0),$

$P(0, 0, 1), B(0, -1, 0), D(\sqrt{3}, 1, 0),$

$\therefore \overline{PA} = (\sqrt{3}, 0, -1), \overline{PB} = (0, -1, -1),$

设平面 PAB 的一个法向量为 $\mathbf{n}_1 = (x, y, z)$.

$$\begin{cases} \sqrt{3}x - z = 0, \\ -y - z = 0, \end{cases} \quad \text{不妨设 } x = \sqrt{3}, \text{ 则 } \mathbf{n}_1 = (\sqrt{3}, -3, 3). \quad \dots\dots 9 \text{ 分}$$

同理可得平面 PAD 的一个法向量为 $\mathbf{n}_2 = (\sqrt{3}, 0, 3)$.

$$\therefore \cos \langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 \rangle = \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1| \cdot |\mathbf{n}_2|} = \frac{12}{\sqrt{21} \cdot \sqrt{12}} = \frac{2\sqrt{7}}{7}. \quad \dots\dots 11$$

分

由图可知, 所求二面角的平面角为钝角,

$$\therefore \text{二面角 } B-PA-D \text{ 的平面角的余弦值为 } -\frac{2\sqrt{7}}{7}. \quad \dots\dots 12 \text{ 分}$$

20. 解: (1) $\because e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}, a^2 = b^2 + c^2, \therefore a^2 = 2b^2. \quad \dots\dots 2$

分

$$\therefore |AB| = \frac{2a^2}{b^2} = 4, \text{ 由题意得点 } A \text{ 的坐标为 } (\sqrt{2}, \sqrt{2}).$$

代入椭圆方程得 $\frac{2}{a^2} + \frac{2}{b^2} = 1$.

联立解得 $b^2 = 3, a^2 = 6$.

$$\therefore \text{椭圆 } E \text{ 的方程为 } \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1. \quad \dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$(2) \text{ 联立 } \begin{cases} y = x + m, \\ \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1, \end{cases} \text{ 消 } y \text{ 整理得 } 3x^2 + 4mx + 2m^2 - 6 = 0.$$

由 $\Delta = 16m^2 - 12(2m^2 - 6) > 0$, 解得 $-3 < m < 3$.

由韦达定理得 $x_1 + x_2 = -\frac{4m}{3}$, ① $x_1 \cdot x_2 = \frac{2m^2 - 6}{3}$. ②7分

若存在点 P , 使得 $|AP| = |AB|$, $AP \perp AB$, 则 $P(\frac{14}{3}, y_2)$.

且直线 AP 的斜率为 $k = \frac{y_2 - y_1}{\frac{14}{3} - x_1} = \frac{x_2 - x_1}{\frac{14}{3} - x_1} = -1$, 即 $x_2 = 2x_1 - \frac{14}{3}$. ③9分

分

联立①②③得 $11m^2 + 28m + 17 = 0$, 解得 $m = -1$ 或 $-\frac{17}{11}$.

\therefore 存在点 P 满足题意, 此时 $m = -1$ 或 $-\frac{17}{11}$12分

21. 解: (1) $f'(x) = \ln x - a$.

令 $f'(x) > 0$, 解得 $x > e^a$, $f'(x) < 0$, 解得 $0 < x < e^a$.

\therefore 函数 $f(x)$ 在区间 $(0, e^a)$ 上单调递减, 在区间 $(e^a, +\infty)$ 上单调递增.3分

当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) \rightarrow 1$; 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) = x[\ln x - (a+1)] + 1 \rightarrow +\infty$.

\therefore 要使得 $f(x)$ 有 2 个零点, 则 $f(e^a) = 1 - e^a < 0$,

解得 $a > 0$5分

(2) $f'(x) = \ln x - a$, $x \in [1, e]$, $\ln x \in [0, 1]$.

i) 当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) \geq 0$ 恒成立, 函数 $f(x)$ 在区间 $[1, e]$ 上单调递增,

$\therefore m = f(e) = 1 - ae$, $n = f(1) = -a$. $\therefore m - n = (1 - e)a + 1$.

令 $p(a) = (1 - e)a + 1$, 则函数 $p(a)$ 在区间 $(-\infty, 0]$ 上单调递减,

\therefore 函数 $p(a)$ 最小值为 $h(0) = 1$7分

ii) 当 $a \geq 1$ 时, $f'(x) \leq 0$ 恒成立, 函数 $f(x)$ 在区间 $[1, e]$ 上单调递减.

$\therefore m = f(1) = -a$, $n = f(e) = 1 - ae$, $\therefore m - n = (e - 1)a - 1$.

令 $h(a) = (e - 1)a - 1$, 则函数 $h(a)$ 在区间 $[1, +\infty)$ 上单调递增,

\therefore 函数 $h(a)$ 最小值为 $h(1) = e - 2$9分

iii) 当 $0 < a < 1$ 时, 由 $f'(x) > 0$, 解得 $e^a < x \leq e$, 由 $f'(x) < 0$, 解得 $1 \leq x < e^a$.

\therefore 函数 $f(x)$ 在区间 $[1, e^a)$ 上单调递减, 在区间 $(e^a, e]$ 上单调递增.

$\therefore n = f(e^a) = 1 - e^a$.

① 当 $\frac{1}{e-1} \leq a < 1$ 时, $f(1) - f(e) = (e-1)a - 1 \geq 0$, 此时 $m = f(1) = -a$.

$\therefore m - n = f(1) - f(e^a) = e^a - a - 1$.

令 $q(a) = e^a - a - 1$, 则 $q'(a) = e^a - 1 > 0$.

\therefore 函数 $q(a)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

\therefore 函数 $q(a)$ 的最小值为 $q(\frac{1}{e-1}) < q(1) = e - 2$,

$$\therefore q\left(\frac{1}{e-1}\right) = e^{\frac{1}{e-1}} - \frac{1}{e-1} - 1 = e^{\frac{1}{e-1}} - \frac{e}{e-1}. \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

②当 $0 < a < \frac{1}{e-1}$ 时, 由 $f(1) - f(e) = (e-1)a - 1 < 0$, $\therefore m = f(e) = 1 - ae$.

$$\therefore m - n = f(e) - f(e^a) = e^a - ae.$$

令 $\varphi(a) = e^a - ae$, 则 $\varphi'(a) = e^a - e < 0$.

\therefore 函数 $\varphi(a)$ 在区间 $(0, 1)$ 上单调递减,

$$\therefore \varphi(a) > \varphi\left(\frac{1}{e-1}\right) = e^{\frac{1}{e-1}} - \frac{e}{e-1}.$$

综上所述, $m - n$ 的最小值为 $e^{\frac{1}{e-1}} - \frac{e}{e-1}$. $\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

22. 解: (1) 将直线 l 的参数方程消参, 得直线 l 的普通方程为 $x + y = \frac{4}{3}$.

$$\because \rho^2 = x^2 + y^2, \quad \rho \cos \theta = x, \quad \rho \sin \theta = y,$$

$$\text{又 } x^2 + y^2 = |x| + |y|, \quad \therefore \rho^2 = |\rho \cos \theta| + |\rho \sin \theta|,$$

\therefore 曲线 C 的极坐标方程为 $\rho = |\cos \theta| + |\sin \theta|$. $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

$$(2) \text{ 联立 } \begin{cases} \theta = \alpha, & \alpha \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ \rho = |\cos \theta| + |\sin \theta|, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} \theta = \alpha, \\ \rho = \cos \alpha + \sin \alpha. \end{cases}$$

\therefore 点 B 的坐标为 $(\cos \alpha + \sin \alpha, \alpha)$. $\dots\dots\dots 7 \text{ 分}$

由题意得直线 l 的极坐标方程为 $\rho \cos \theta + \rho \sin \theta = \frac{4}{3}$.

$$\text{联立 } \begin{cases} \theta = \alpha, \\ \rho \cos \theta + \rho \sin \theta = \frac{4}{3}, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} \theta = \alpha, \\ \rho = \frac{4}{3(\cos \theta + \sin \theta)}. \end{cases}$$

\therefore 点 A 的坐标为 $(\frac{4}{3(\cos \alpha + \sin \alpha)}, \alpha)$. $\dots\dots\dots 8 \text{ 分}$

$$\therefore \frac{|OA|}{|OB|} = \frac{4}{3(\cos \alpha + \sin \alpha)(\cos \alpha + \sin \alpha)} = \frac{4}{3(1 + \sin 2\alpha)}.$$

$$\because 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}, \quad \therefore 0 \leq 2\alpha \leq \pi, \quad \therefore 0 \leq \sin 2\alpha \leq 1,$$

$$\therefore \frac{1}{2} \leq \frac{1}{1 + \sin 2\alpha} \leq 1, \quad \therefore \frac{2}{3} \leq \frac{4}{3(1 + \sin 2\alpha)} \leq \frac{4}{3}.$$

$\therefore \frac{2}{3} \leq \frac{|OA|}{|OB|} \leq \frac{4}{3}$, 即 $\frac{|OA|}{|OB|}$ 的取值范围是 $[\frac{2}{3}, \frac{4}{3}]$. $\dots\dots\dots 10 \text{ 分}$

23. 解: ①当 $x \leq 1$ 时, 不等式等价于 $3 - 2x \geq x + 1$, 解得 $x \leq \frac{2}{3}$, 综合, $x \leq \frac{2}{3}$;

当 $1 < x < 2$ 时, 不等式等价于 $1 \geq x+1$, 解得 $x \leq 0$, 综合, 无解;

当 $x \geq 2$ 时, 不等式等价于 $2x-3 \geq x+1$, 解得 $x \geq 4$, 综合, $x \geq 4$;

综上, 不等式的解集为 $\{x | x \leq \frac{2}{3} \text{ 或 } x \geq 4\}$5 分

(2) 证明: 不等式等价于 $\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}$,

要证 $\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}$, 只要证 $\frac{1+|a+b|}{|a+b|} \geq \frac{1+|a|+|b|}{|a|+|b|}$,

只要证 $\frac{1}{|a+b|} \geq \frac{1}{|a|+|b|}$, 只要证 $|a+b| \leq |a|+|b|$,

上式显然成立, 所以原不等式成立.10

分

师指道高考志愿填报
18108186159