绵阳市高中2020级第一次诊断性考试

文科数学参考答案及评分意见

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，共60分。

BADAB　　CDACB　　DD

二、填空题：本大题共4小题，每小题5分，共20分。

13．5　　14．31　　15．$(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$　　16．10.5

三、解答题：本大题共6小题，共70分。

17．**解：**（1）$f(x)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-\cos^2 x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-\dfrac{\cos 2x+1}{2}=\sin(2x-\dfrac{\pi}{6})-\dfrac{1}{2}$ ………4分

令 $\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x-\dfrac{\pi}{6}\leqslant\dfrac{3\pi}{2}+2k\pi\ (k\in\mathbf{Z})$，………………………………………6分

解得 $\dfrac{\pi}{3}+k\pi\leqslant x\leqslant\dfrac{5\pi}{6}+k\pi\ (k\in\mathbf{Z})$，

∴函数 $f(x)$的单调递减区间为$[\dfrac{\pi}{3}+k\pi,\ \dfrac{5\pi}{6}+k\pi]\ (k\in\mathbf{Z})$. …………………………8分

（2）由 $f(x)=-1$，得 $\sin(2x-\dfrac{\pi}{6})=-\dfrac{1}{2}$，

∵ $x\in[0,\ \pi]$，∴ $2x-\dfrac{\pi}{6}\in[-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{11\pi}{6}]$. ……………………………………………9分

∴ $2x-\dfrac{\pi}{6}=-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{7\pi}{6},\dfrac{11\pi}{6}$，……………………………………………………11分

解得 $x=0,\ \dfrac{2\pi}{3},\ \pi$. ……………………………………………………………12分

18．**解：**（1）设等差数列$\{a_n\}$的公差为d.

∵ $a_1+a_2+a_3=15$，$a_8+a_9=4a_4$，

∴ $\begin{cases}3a_1+3d=15,\\ 2a_1+15d=4a_1+12d,\end{cases}$ ……………………………………………………3分

解得 $\begin{cases}a_1=3,\\ d=2.\end{cases}$ ……………………………………………………………4分

∴ $a_n=3+2(n-1)=2n+1$. ……………………………………………………6分

（2）∵ $c_n=\dfrac{1}{(2n+1)(2n+3)}=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{2n+1}-\dfrac{1}{2n+3})$，　……………………………8分

∴ $\dfrac{1}{c_1}+\dfrac{1}{c_2}+\cdots+\dfrac{1}{c_n}=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\cdots+\dfrac{1}{2n+1}-\dfrac{1}{2n+3})$ ……………………10分

$=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2n+3})$. ………………………………………12分

19．**解**：（1）∵ $a\cdot\cos B=b(1+\cos A)$，

由正弦定理，得 $\sin A\cdot\cos B=\sin B(1+\cos A)$，……………………………………2 分

即 $\sin A\cdot\cos B-\cos A\cdot\sin B=\sin B$，

∴ $\sin(A-B)=\sin B$，………………………………………………………………4 分

∴ $A-B=B$ 或 $(A-B)+B=\pi$（舍），即 $A=2B$．…………………………………6 分

（2）由锐角△ABC，可得 $0<B<\dfrac{\pi}{2}$， $0<A=2B<\dfrac{\pi}{2}$， $0<C=\pi-3B<\dfrac{\pi}{2}$．

即 $\dfrac{\pi}{6}<B<\dfrac{\pi}{4}$， ∴ $\dfrac{\sqrt{2}}{2}<\cos B<\dfrac{\sqrt{3}}{2}$．……………………………………9 分

∵ $a\cos B=b(1+\cos A)$

∴ $a\cos B=2(1+\cos 2B)$．……………………………………………………10 分

∴ $a=4\cos B$．………………………………………………………………11 分

∴ $a\in(2\sqrt{2},2\sqrt{3})$．………………………………………………………12 分

20．**解**：（1）由题意得 $f'(x)=x^2-(k+4)x+4k=(x-4)(x-k)$．…………………1 分

当 $k=1$ 时，由 $f'(x)>0$，得 $x<1$ 或 $x>4$．

由 $f'(x)<0$，得 $1<x<4$．…………………………………………………………3 分

∴函数 $f(x)$ 在(1，4)上单调递减，在(-∞，1)和(4，+∞)上单调递增．…………5 分

∴函数 $f(x)$ 的极大值为 $f(1)=0$，极小值为 $f(4)=-\dfrac{9}{2}$．……………………6 分

（2）当 $k\leqslant 0$ 或 $k\geqslant 3$ 时，函数 $f(x)$ 在(0，3)上为单调函数，最多只有一个零点．

当 $0<k<3$ 时，函数 $f(x)$ 在(0，k)上单调递增，在(k，3)上单调递减．…………9 分

要使函数 $f(x)$ 在(0，3)上有两个零点，则需满足：

$0<k<3$ 且 $\begin{cases} f(k)>0, \\ f(0)<0, \\ f(3)<0, \end{cases}$ 解得 $1<k<\dfrac{13}{9}$．………………………………12 分

21．**解**：（1）由题意得 $f'(x)=2x+\dfrac{1}{2x}-m$，

∴ $2x+\dfrac{1}{2x}\geqslant 2\sqrt{2x\cdot\dfrac{1}{2x}}=2$．……………………………………………2 分

①当 $m\leqslant 2$ 时，不等式 $f'(x)\geqslant 0$ 恒成立，

∴函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增．……………………………………3 分

②当 $m>2$ 时，由 $f'(x)>0$，解得 $0<x<\dfrac{m-\sqrt{m^2-4}}{4}$ 或 $x>\dfrac{m+\sqrt{m^2-4}}{4}$.

函数 $f(x)$的单调增区间为 $(0,\dfrac{m-\sqrt{m^2-4}}{4})$，$(\dfrac{m+\sqrt{m^2-4}}{4},+\infty)$，

单调减区间为 $(\dfrac{m-\sqrt{m^2-4}}{4},\dfrac{m+\sqrt{m^2-4}}{4})$. ······························5 分

综上，当 $m\leqslant 2$ 时，函数 $f(x)$的增区间为 $(0,+\infty)$，无递减区间；

当 $m>2$ 时，函数 $f(x)$的增区间为 $(0,\dfrac{m-\sqrt{m^2-4}}{4})$，$(\dfrac{m+\sqrt{m^2-4}}{4},+\infty)$.

函数 $f(x)$的减区间为 $(\dfrac{m-\sqrt{m^2-4}}{4},\dfrac{m+\sqrt{m^2-4}}{4})$. ······························6 分

（2）当 $x\in[\dfrac{1}{2},+\infty)$ 时，由 $f(1)=0$，要使得 $f(x)\geq 0$ 恒成立，

∴ $f'(1)=0$.

又 $f'(x)=2x+\dfrac{1}{2x}-m$，

∴ $f'(1)=2+\dfrac{1}{2}-m=0$，解得 $m=\dfrac{5}{2}$. ······························8 分

下证：当 $m=\dfrac{5}{2}$ 时，$f(x)\geqslant 0$ 恒成立，此时 $f(x)=x^2+\dfrac{1}{2}\ln x-\dfrac{5}{2}x+\dfrac{3}{2}$.

$f'(x)=2x+\dfrac{1}{2x}-\dfrac{5}{2}=\dfrac{4x^2-5x+1}{2x}=\dfrac{(4x-1)(x-1)}{2x}$. ······························9 分

∵ $x\in[\dfrac{1}{2},+\infty)$，

∴由 $f'(x)>0$，解得 $x>1$．由 $f'(x)<0$ 解得 $0<x<1$．

∴ $f(x)\geqslant f(1)=0$. ······························11 分

综上，$m=\dfrac{5}{2}$. ······························12 分

22．**解：**（1）由题意得圆 C 的普通方程为 $(x-3)^2+y^2=9$.

直线 l 的普通方程为 $\sqrt{3}x-y+6=0$. ······························4 分

∵圆心 C 到直线 l 的距离 $d=\dfrac{3\sqrt{3}+6}{2}>3$，

∴直线 l 和圆 C 相离. ······························5 分

（2）设 $P(3+3\cos\theta, 3\sin\theta)$ $(\theta\in[0,2\pi))$．

由 $\dfrac{|3\sqrt{3}\cos\theta-3\sin\theta+6+3\sqrt{3}|}{2}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，

$\therefore |2\cos(\dfrac{\pi}{6}+\theta)+2+\sqrt{3}|=\sqrt{3}$， 则 $\cos(\dfrac{\pi}{6}+\theta)=-1$． ………………………………7 分

$\therefore \dfrac{\pi}{6}+\theta=\pi$， 则 $\theta=\dfrac{5\pi}{6}$， ……………………………………………………………8 分

$\therefore P(3-\dfrac{3\sqrt{3}}{2},\dfrac{3}{2})$， ……………………………………………………………9 分

$\therefore \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CP}=-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$． ……………………………………………………10 分

23．**解：**（1） $f(x)=|x+2|+\left|x+\dfrac{1}{2}\right|+\left|x+\dfrac{1}{2}\right|$

$\geqslant\left|(x+2)-(x+\dfrac{1}{2})\right|+\left|x+\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{3}{2}+\left|x+\dfrac{1}{2}\right|$ ………………………………3 分

$\geqslant\dfrac{3}{2}$．(当且仅当 $x=-\dfrac{1}{2}$ 时，取等) ……………………………………4 分

∴函数 $f(x)$的最小值为 $\dfrac{3}{2}$． ……………………………………………………5 分

（2）∵$f(a)+f(b)+f(c)=18$，

$\therefore a+b+c=3$． ………………………………………………………………………6 分

由 $(a+b+c)(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c})=1+\dfrac{a}{b}+\dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{a}+1+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{a}+\dfrac{c}{b}+1$

$=(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a})+(\dfrac{c}{a}+\dfrac{a}{c})+(\dfrac{c}{b}+\dfrac{b}{c})+3\geqslant 9$，

得 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\geqslant 3$． ……………………………………………………………8 分

$\because (a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac\leqslant 3(a^2+b^2+c^2)$，

$\therefore a^2+b^2+c^3\geqslant 3$． ……………………………………………………………9 分

$\therefore (\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c})(a^2+b^2+c)\geqslant 9$，

$\therefore \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\geqslant\dfrac{9}{a^2+b^2+c^2}$． ……………………………………………10 分