

绵阳市高中 2020 级第一次诊断性考试

理科数学参考答案及评分意见

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分.

BDABC BBCDA DC

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 2 14. 31 15. 10.5 16. (-2, 1)

三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分.

17. 解：(1) $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x - \cos^2 x = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x - \frac{\cos 2x + 1}{2} = \sin(2x - \frac{\pi}{6}) - \frac{1}{2}$4 分

令 $\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x - \frac{\pi}{6} \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$,6 分

解得 $\frac{\pi}{3} + k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{6} + k\pi (k \in \mathbf{Z})$,

\therefore 函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $[\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{5\pi}{6} + k\pi] (k \in \mathbf{Z})$8 分

(2) 由 $f(x) = -1$, 得 $\sin(2x - \frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$,

$\because x \in [0, \pi]$, $\therefore 2x - \frac{\pi}{6} \in [-\frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}]$9 分

$\therefore 2x - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$,11 分

解得 $x = 0, \frac{2\pi}{3}, \pi$12 分

18. 解：(1) 证明： $\because a_{n+2} + 4a_n = 5a_{n+1}, n \in \mathbf{N}^*$,

$\therefore a_{n+2} - a_{n+1} = 4(a_{n+1} - a_n), n \in \mathbf{N}^*$,

即 $\frac{a_{n+2} - a_{n+1}}{a_{n+1} - a_n} = 4$3 分

$\because a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = 1, \therefore a_2 - a_1 = \frac{1}{2}$,4 分

\therefore 数列 $\{a_{n+1} - a_n\}$ 是以 $\frac{1}{2}$ 为首项, 4 为公比的等比数列.6 分

(2) 由 (1) 知, $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2} \times 4^{n-1} = 2^{2n-3}$,8 分

$\therefore a_n = (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \cdots + (a_2 - a_1) + a_1$
 $= 2^{2n-5} + 2^{2n-7} + 2^{2n-9} + \cdots + 2^{-1} + 2^{-1}$11 分

当 $n=1$ 时, $a_1 = \frac{1}{3}(2^{-1} + 1) = \frac{1}{2}$.

综上所述, $a_n = \frac{1}{3}(2^{2n-3} + 1) (n \in N^*)$12分

19. 解: (1) $\because a \cdot \cos B = b(1 + \cos A)$,

由正弦定理, 得 $\sin A \cdot \cos B = \sin B(1 + \cos A)$,1分

即 $\sin A \cdot \cos B - \cos A \cdot \sin B = \sin B$,

$\therefore \sin(A - B) = \sin B$,3分

$\therefore A - B = B$ 或 $(A - B) + B = \pi$ (舍), 即 $A = 2B$,4分

$\therefore C = \pi - A - B = \pi - 3B$,

$\therefore \sin C = \sin(\pi - 3B) = \sin 3B$6分

(2) 由锐角 $\triangle ABC$, 可得 $0 < B < \frac{\pi}{2}$, $0 < A = 2B < \frac{\pi}{2}$, $0 < C = \pi - 3B < \frac{\pi}{2}$.

即 $\frac{\pi}{6} < B < \frac{\pi}{4}$, $\therefore \frac{\sqrt{2}}{2} < \cos B < \frac{\sqrt{3}}{2}$9分

$\therefore \frac{c}{a} = \frac{\sin C}{\sin A} = \frac{\sin 3B}{\sin 2B} = \frac{\sin 2B \cdot \cos B + \cos 2B \cdot \sin B}{\sin 2B} = 2\cos B - \frac{1}{2\cos B}$11分

$\therefore \frac{c}{a} \in (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{2\sqrt{3}}{3})$12分

20. 解: 由题意得 $f'(x) = x^2 - (k+4)x + 4k = (x-4)(x-k)$1分

(1) 当 $k=4$ 时, 由 $f'(x) = (x-4)^2 \geq 0$, 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增.

当 $k > 4$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(4, k)$ 上单调递减,

在 $(-\infty, 4)$ 和 $(k, +\infty)$ 上单调递增.3分

当 $k < 4$ 时, 易知函数 $f(x)$ 在 $(k, 4)$ 上单调递减,

在 $(-\infty, k)$, $(4, +\infty)$ 上单调递增.5分

(2) 当 $k \leq 0$ 或 $k \geq 3$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(0, 3)$ 上为单调函数, 最多只有一个零点.

当 $0 < k < 3$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(0, k)$ 上单调递增, 在 $(k, 3)$ 上单调递减.7分

要使函数 $f(x)$ 在 $(0, 3)$ 上有两个零点, 则需满足:

$$0 < k < 3 \text{ 且 } \begin{cases} f(k) > 0, \\ f(0) < 0, \\ f(3) < 0, \end{cases} \text{ 解得 } 1 < k < \frac{13}{9}. \text{9分}$$

$\therefore f_{\min}(x) = \min\{f(0), f(3)\}$10分

又 $f(3) - f(0) = \frac{15}{2}k - 9$,

∴当 $k > \frac{6}{5}$ 时, $f(3) > f(0)$; 当 $k < \frac{6}{5}$ 时, $f(3) < f(0)$.

$$\text{又 } \frac{6}{5} < \frac{13}{9}, \therefore f_{\min}(x) = \begin{cases} -\frac{11}{6}, \frac{6}{5} \leq k < \frac{13}{9}, \\ \frac{15k}{2} - \frac{65}{6}, 1 < k < \frac{6}{5}. \end{cases} \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

21. 解: (1) 由题意得 $f'(x) = 2e^x - 2x - a$.

令 $g(x) = 2e^x - 2x - a$, 则 $g'(x) = 2e^x - 2 > 0$.

∴函数 $f'(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上单调递增,

则函数 $f'(x)$ 的最小值为 $f'(0) = 2 - a$. $\dots\dots\dots 3 \text{ 分}$

①当 $2 - a \geq 0$, 即 $a \leq 2$ 时, 可得 $f'(x) \geq f'(0) \geq 0$,

∴函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增.

又 $f(0) = 0$, ∴ $f(x) \geq f(0) = 0$ 恒成立. $\dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

②当 $2 - a < 0$, 即 $a > 2$ 时, 函数 $f'(x)$ 的最小值为 $f'(0) = 2 - a < 0$,

且存在 $x_0 > 0$, 当 $x \in [0, x_0)$ 时, $f'(x) < 0$.

又 $f(0) = 0$, ∴当 $x \in [0, x_0)$ 时, $f(x) < 0$,

这与 $x \geq 0$ 时, $f(x) \geq 0$ 相矛盾. $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

综上, 实数 a 的取值范围是 $(-\infty, 2]$. $\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

(2) 由(1) 得当 $a = 2$ 时, 不等式 $f(x) = 2e^x - x^2 - 2x - 2 \geq 0$ 恒成立,

$$\therefore 2e^x - 1 \geq x^2 + 2x + 1.$$

令 $x = n$, 得 $2e^n - 1 \geq n^2 + 2n + 1$. $\dots\dots\dots 8 \text{ 分}$

$$\therefore \frac{2}{2e^n - 1} \leq \frac{2}{n^2 + 2n + 1} < \frac{2}{n(n+2)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}. \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\text{令 } h(x) = \ln x - x + 1, \text{ 则 } h'(x) = \frac{1-x}{x},$$

$x \in (0, 1)$ 时, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 为 $(0, 1)$ 上的增函数;

$x \in (1, +\infty)$ 时, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 为 $(1, +\infty)$ 上的减函数;

∴ $h(x) \leq h(1) = 0$, 则 $\ln x \leq x - 1$.

$$\therefore \ln\left(1 + \frac{2}{2e^n - 1}\right) < \frac{2}{2e^n - 1} < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}, \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\therefore \ln\left(1 + \frac{2}{2e - 1}\right) \left(1 + \frac{2}{2e^2 - 1}\right) \left(1 + \frac{2}{2e^3 - 1}\right) \cdots \left(1 + \frac{2}{2e^n - 1}\right)$$

$$= \ln\left(1 + \frac{2}{2e - 1}\right) + \ln\left(1 + \frac{2}{2e^2 - 1}\right) + \ln\left(1 + \frac{2}{2e^3 - 1}\right) \cdots + \ln\left(1 + \frac{2}{2e^n - 1}\right)$$

$$\begin{aligned}
 &< (1-\frac{1}{3}) + (\frac{1}{2}-\frac{1}{4}) + (\frac{1}{3}-\frac{1}{5}) + \cdots + (\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}) + (\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}) = \frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \\
 &< \ln e^{\frac{3}{2}} = \ln \sqrt{e^3} < \ln \sqrt{25} = \ln 5.
 \end{aligned}$$

$$\therefore (1+\frac{2}{2e-1})(1+\frac{2}{2e^2-1})(1+\frac{2}{2e^3-1})\cdots(1+\frac{2}{2e^n-1}) < 5. \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

22. 解: (1) 由题意得圆 C 的普通方程为 $(x-3)^2 + y^2 = 9$.

直线 l 的普通方程为 $\sqrt{3}x - y + 6 = 0$. $\dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

$$\therefore \text{圆心 } C \text{ 到直线 } l \text{ 的距离 } d = \frac{3\sqrt{3}+6}{2} > 3,$$

\therefore 直线 l 和圆 C 相离. $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

(2) 设 $P(3+3\cos\theta, 3\sin\theta)$ ($\theta \in [0, 2\pi)$).

$$\text{由 } \frac{|3\sqrt{3}\cos\theta - 3\sin\theta + 6 + 3\sqrt{3}|}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore |2\cos(\frac{\pi}{6} + \theta) + 2 + \sqrt{3}| = \sqrt{3}, \text{ 则 } \cos(\frac{\pi}{6} + \theta) = -1. \quad \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\therefore \frac{\pi}{6} + \theta = \pi, \text{ 则 } \theta = \frac{5\pi}{6}, \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\therefore P(3 - \frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}), \quad \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\therefore \overline{CA} \cdot \overline{CP} = -\frac{3\sqrt{3}}{2}. \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

23. 解: (1) $f(x) = |x+2| + |x+\frac{1}{2}| + |x-\frac{1}{2}|$

$$\geq \left| (x+2) - (x+\frac{1}{2}) \right| + \left| x+\frac{1}{2} \right| = \frac{3}{2} + \left| x+\frac{1}{2} \right| \quad \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\geq \frac{3}{2}. \text{ (当且仅当 } x = -\frac{1}{2} \text{ 时, 取等)} \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

\therefore 函数 $f(x)$ 的最小值为 $\frac{3}{2}$. $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

(2) $\because f(a) + f(b) + f(c) = 18,$

$$\therefore a + b + c = 3. \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\text{由 } (a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = 1 + \frac{a}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + 1 + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b} + 1$$

$$= \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right) + \left(\frac{c}{b} + \frac{b}{c}\right) + 3 \geq 9,$$

得 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3$8分

$$\because (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac \leq 3(a^2 + b^2 + c^2),$$

$\therefore a^2 + b^2 + c^2 \geq 3$9分

$$\therefore \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)(a^2 + b^2 + c^2) \geq 9,$$

$\therefore \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a^2 + b^2 + c^2}$10分

师指道教育