成都市2020级高中毕业班第一次诊断性检测

数学(文科)参考答案及评分意见

第Ⅰ卷 (选择题,共60分)

一、选择题:(每小题5分,共60分)

1.C; 2.A; 3.B; 4.C; 5.C; 6.D; 7.B; 8.D; 9.B; 10.C; 11.A; 12.D.

第Ⅱ卷 (非选择题,共90分)

二、填空题:(每小题5分,共20分)

13. $\frac{1}{3}$; 14. 2; 15. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$; 16. ②③④.

三、解答题:(共70分)

17. **解:**(Ⅰ)由 $(0.004\times 2+0.022+0.030+0.028+m)\times 10=1$, ……2分

解得 $m=0.012$. ……4分

(Ⅱ)由题意知不低于90分的队伍有 $50\times 0.04=2$ 支,故评分在 $[85,90)$ 的队伍有2支.

……5分

评分在 $[80,90)$ 分的队伍有 $50\times 0.12=6$ 支. ……6分

记评分落在 $[80,85)$ 的4支队伍为 A_1,A_2,A_3,A_4;评分落在 $[85,90)$ 的2支队伍为 B_1,B_2.

则从评分在 $[80,90)$ 的队伍中任选两支队伍的基本事件有:(A_1,A_2),(A_1,A_3),(A_1,A_4),(A_1,B_1),(A_1,B_2),(A_2,A_3),(A_2,A_4),(A_2,B_1),(A_2,B_2),(A_3,A_4),(A_3,B_1),(A_3,B_2),(A_4,B_1),(A_4,B_2),(B_1,B_2),共15个. ……9分

其中两支队伍至少有一支队伍评分不低于85分的基本事件有:(A_1,B_1),(A_1,B_2),(A_2,B_1),(A_2,B_2),(A_3,B_1),(A_3,B_2),(A_4,B_1),(A_4,B_2),(B_1,B_2),共9个. ……11分

故所求概率为 $P=\frac{9}{15}=\frac{3}{5}$. ……12分

18. **解:**(Ⅰ)$\because \frac{b}{a}=\sin C+\cos C$,

由正弦定理知 $\frac{\sin B}{\sin A}=\sin C+\cos C$,即 $\sin B=\sin A\sin C+\sin A\cos C$. ……1分

在 $\triangle ABC$ 中,由 $B=\pi-(A+C)$,

$\therefore \sin B=\sin(A+C)=\sin A\cos C+\cos A\sin C=\sin A\sin C+\sin A\cos C$. ……3分

$\therefore \cos A\sin C=\sin A\sin C$. $\because C\in(0,\pi)$,$\therefore \sin C\neq 0$. ……4分

$\therefore \sin A=\cos A$. ……5分

$\because A\in(0,\pi)$,$\therefore A=\frac{\pi}{4}$. ……6分

(Ⅱ)若选择条件①,由正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$,得 $a\sin C=c\sin A=\dfrac{\sqrt{2}}{2}c=2$.

$\therefore c=2\sqrt{2}$. ……9 分

又 $2\sqrt{2}\sin B=3\sin C$,即 $2\sqrt{2}b=3c$.

$\therefore b=3$. ……11 分

$\therefore S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}\times 3\times 2\sqrt{2}\sin\dfrac{\pi}{4}=3$. ……12 分

若选择条件②,由 $2\sqrt{2}\sin B=3\sin C$,即 $2\sqrt{2}b=3c$.

设 $c=2\sqrt{2}m$,$b=3m(m>0)$. ……7 分

则 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=5m^2$. $\therefore a=\sqrt{5}m$. ……9 分

由 $ac=2\sqrt{10}$,得 $m=1$.

$\therefore a=\sqrt{5}$,$b=3$,$c=2\sqrt{2}$. ……11 分

$\therefore S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}\times 3\times 2\sqrt{2}\sin\dfrac{\pi}{4}=3$. ……12 分

19. **解**:(Ⅰ)由题意得 $DE\perp AC$,$DE\perp DP$. ……1 分

$\because$ 平面 $PDE\perp$ 平面 $ABED$,$PD\subset$ 平面 PDE,

平面 $PDE\cap$ 平面 $ABED=DE$,$PD\perp DE$,

$\therefore PD\perp$ 平面 $ABED$. ……3 分

$\because D$ 为 AC 的中点,

$\therefore DA=DE=DP=1$. ……4 分

$\therefore V_{P-ABED}=\dfrac{1}{3}S_{ABED}\cdot DP=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{3}{2}\times 1=\dfrac{1}{2}$.

$\therefore$四棱锥 $P-ABED$ 的体积为 $\dfrac{1}{2}$. ……6 分

(Ⅱ)$\because DE /\!/ AB$,$DE\not\subset$ 平面 PAB,$AB\subset$ 平面 PAB,

$\therefore DE /\!/$ 平面 PAB. ……8 分

$\because DE\subset$ 平面 PDE,平面 $PDE\cap$ 平面 $PAB=l$,

$\therefore DE /\!/ l$. ……9 分

由图① $DE\perp AC$,得 $DE\perp DA$,$DE\perp DP$,

$\therefore l\perp DA$,$l\perp DP$. ……10 分

$\because DA$,$DP\subset$ 平面 ADP,$DA\cap DP=D$,

$\therefore l\perp$ 平面 ADP. ……12 分

20. **解**:(Ⅰ)由$\triangle DF_1F_2$ 为等边三角形,$|DF_1|=|DF_2|=a$,得 $a=2c$(c 为半焦距). ……1 分

$\because |AF_1|+|AF_2|=2a$,$|BF_1|+|BF_2|=2a$,

$\therefore \triangle F_1AB$ 的周长为 $4a=8$,得 $a=2$. ……2 分

$\therefore c=1$,$b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{3}$.

$\therefore$椭圆 E 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$. ……4 分

(Ⅱ)由(Ⅰ)知 $F_2(1,0)$，且直线 l 斜率不为 0.

设直线 $l: x=my+1$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$.

由 $\begin{cases} x=my+1, \\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1 \end{cases}$ 消去 x，得 $(3m^2+4)y^2+6my-9=0$.

显然 $\Delta=144(m^2+1)>0$. ……5 分

$\therefore y_1+y_2=\dfrac{-6m}{3m^2+4}$，$y_1y_2=\dfrac{-9}{3m^2+4}$. ……6 分

由 $\triangle F_1AB$ 面积 $S=\dfrac{1}{2}\cdot|F_1F_2|\cdot|y_1-y_2|=|y_1-y_2|$.

而 $|y_1-y_2|=\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\sqrt{(\dfrac{-6m}{3m^2+4})^2-4\cdot\dfrac{-9}{3m^2+4}}=\dfrac{12\sqrt{m^2+1}}{3m^2+4}$.

……9 分

设 $t=\sqrt{m^2+1}\geqslant 1$，则 $|y_1-y_2|=\dfrac{12t}{3t^2+1}=\dfrac{12}{3t+\dfrac{1}{t}}$.

$\because y=3t+\dfrac{1}{t}$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增，$\therefore$ 当 $t=1$ 时，$(3t+\dfrac{1}{t})_{\min}=4$. ……11 分

即当 $m=0$ 时，$S=|y_1-y_2|$ 取得最大值 3，此时直线 l 的方程为 $x=1$. ……12 分

21.**解**：(Ⅰ)记 $g(x)=f(x)-x=\ln x-x+a-1$.

则 $g(x)\leqslant 0$ 恒成立，即 $g(x)_{\max}\leqslant 0$. ……1 分

$\because g'(x)=\dfrac{1-x}{x}$，$\therefore g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减. ……3 分

$\therefore g(x)_{\max}=g(1)\leqslant 0$. 解得 $a\leqslant 2$.

$\therefore$ 实数 a 的取值范围是 $(-\infty,2]$. ……5 分

(Ⅱ)记 $h(x)=\dfrac{(x-1)e^x}{e^a}-f(x)=\dfrac{(x-1)e^x}{e^a}-\ln x+1-a\ (x>0)$.

$\because h'(x)=xe^{x-a}-\dfrac{1}{x}$，$h'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增. ……6 分

由 $a\in(0,1]$，知 $h'(\dfrac{1}{2})=\dfrac{1}{2}e^{\frac{1}{2}-a}-2<0$，$h'(1)=e^{1-a}-1\geqslant 0$.

$\therefore \exists x_0\in(\dfrac{1}{2},1]$，$h'(x_0)=0$. 即 $x_0e^{x_0-a}=\dfrac{1}{x_0}$. …(＊) ……7 分

$\therefore$ 当 $x\in(0,x_0)$，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减；当 $x\in(x_0,+\infty)$，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增.

$\therefore h(x)_{\min}=h(x_0)=(x_0-1)e^{x_0-a}-\ln x_0+1-a$. …(＊＊) ……8 分

由(＊)式，可得 $e^{x_0-a}=\dfrac{1}{x_0^2}$，$x_0-a=-2\ln x_0$.

代入(＊＊)式，得 $h(x_0)=\dfrac{x_0-1}{x_0^2}-3\ln x_0-x_0+1$. ……9 分

由(Ⅰ)知，当 $a=2$ 时有 $\ln x\leqslant x-1$，故 $-\ln x_0\geqslant 1-x_0$.

$\therefore h(x_0) \geqslant \dfrac{x_0-1}{x_0^2} - 3(x_0-1) - x_0 + 1 = \dfrac{(1-x_0)(2x_0-1)(2x_0+1)}{x_0^2}$. ……11 分

由 $x_0 \in (\dfrac{1}{2}, 1]$，$\therefore h(x_0) \geqslant 0$.

故 $h(x) \geqslant 0$，即 $f(x) \leqslant \dfrac{(x-1)e^x}{e^a}$，原不等式得证. ……12 分

22. **解**：(Ⅰ)由圆 C_1 的参数方程消去参数 t，得圆 C_1 的普通方程为

$(x-2)^2 + y^2 = 1$，圆心 $A(2,0)$. ……2 分

把 $x = \rho\cos\theta$，$y = \rho\sin\theta$ 代入 $(x-2)^2 + y^2 = 1$， ……3 分

化简得圆 C_1 的极坐标方程为 $\rho^2 - 4\rho\cos\theta + 3 = 0$. ……5 分

(Ⅱ)由题意，在极坐标系中，点 $A(2,0)$.

$\because$ 点 B 在曲线 C_2 上，设 $B(2-2\cos\theta, \theta)$. ……6 分

在△AOB 中，由余弦定理有 $AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cdot \cos\angle AOB$，

即 $3 = 4 + (2-2\cos\theta)^2 - 2 \times 2(2-2\cos\theta)\cos\theta$.

化简得 $12\cos^2\theta - 16\cos\theta + 5 = 0$. ……8 分

解得 $\cos\theta = \dfrac{1}{2}$ 或 $\cos\theta = \dfrac{5}{6}$.

故 $\rho = 2 - 2\cos\theta = 1$ 或 $\rho = 2 - 2\cos\theta = \dfrac{1}{3}$.

$\therefore$ 点 B 的极径为 1 或 $\dfrac{1}{3}$. ……10 分

23. **解**：(Ⅰ)当 $a = 1$，$b = \dfrac{1}{2}$ 时，$f(x) = |x-3| + |x+2|$. ……1 分

当 $x \leqslant -2$ 时，$f(x) = 1 - 2x \geqslant 7$，解得 $x \leqslant -3$； ……3 分

当 $-2 < x < 3$ 时，$f(x) = 5 \geqslant 7$，此时无解； ……4 分

当 $x \geqslant 3$ 时，$f(x) = 2x - 1 \geqslant 7$，解得 $x \geqslant 4$. ……2 分

综上，不等式 $f(x) \geqslant 7$ 的解集为 $(-\infty, -3] \cup [4, +\infty)$. ……5 分

(Ⅱ)由 $f(x) = |x-3a| + |x+4b| \geqslant |x+4b-(x-3a)| = |3a+4b|$，

当且仅当 $-4b \leqslant x \leqslant 3a$ 时，等号成立.

$\because a \geqslant 0, b \geqslant 0$.

$\therefore f(x)_{\min} = |3a+4b| = 3a + 4b = 6$. ……7 分

由柯西不等式，得 $\sqrt{3a} + \sqrt{b} = 1 \cdot \sqrt{3a} + \dfrac{1}{2} \cdot \sqrt{4b} \leqslant \sqrt{1^2 + (\dfrac{1}{2})^2} \cdot \sqrt{3a+4b} = \dfrac{\sqrt{30}}{2}$.

……9 分

当且仅当 $2 = \dfrac{\sqrt{3a}}{\sqrt{4b}}$ 时，即 $a = \dfrac{8}{5}$，$b = \dfrac{3}{10}$ 等号成立.

综上，$\sqrt{3a} + \sqrt{b}$ 的最大值为 $\dfrac{\sqrt{30}}{2}$. ……10 分