成都市 2020 级高中毕业班第一次诊断性检测

数学(理科)参考答案及评分意见

第Ⅰ卷 （选择题,共 60 分）

一、选择题:(每小题 5 分,共 60 分)

1.C； 2.A； 3.B； 4.C； 5.C； 6.B； 7.D； 8.B； 9.C； 10.A； 11.D； 12.B.

第Ⅱ卷 （非选择题,共 90 分）

二、填空题:(每小题 5 分,共 20 分)

13. $\frac{1}{3}$； 14. 240； 15. $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$； 16. ②③④.

三、解答题:(共 70 分)

17.**解:**(Ⅰ)由 $(0.004\times2+0.022+0.030+0.028+m)\times10=1$, ……2 分

解得 $m=0.012$. ……4 分

(Ⅱ)由题意知不低于 80 分的队伍有 $50\times(0.12+0.04)=8$ 支, ……5 分

不低于 90 分的队伍有 $50\times0.04=2$ 支. ……6 分

随机变量 X 的可能取值为 0,1,2.

$\because P(X=0)=\frac{C_6^3}{C_8^3}=\frac{5}{14}$, $P(X=1)=\frac{C_6^2C_2^1}{C_8^3}=\frac{15}{28}$, $P(X=2)=\frac{C_6^1C_2^2}{C_8^3}=\frac{3}{28}$, ……9 分

$\therefore$ X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{5}{14}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{28}$

……10 分

$E(X)=0\times\frac{5}{14}+1\times\frac{15}{28}+2\times\frac{3}{28}=\frac{3}{4}$. ……12 分

18.**解:**(Ⅰ) $\because$ $\frac{b}{a}=\sin C+\cos C$,

由正弦定理知 $\frac{\sin B}{\sin A}=\sin C+\cos C$,即 $\sin B=\sin A\sin C+\sin A\cos C$. ……1 分

在$\triangle ABC$ 中,由 $B=\pi-(A+C)$,

$\therefore\sin B=\sin(A+C)=\sin A\cos C+\cos A\sin C=\sin A\sin C+\sin A\cos C$. ……3 分

$\therefore\cos A\sin C=\sin A\sin C$. $\because C\in(0,\pi)$, $\therefore\sin C\neq0$. ……4 分

$\therefore\sin A=\cos A$. ……5 分

$\because A\in(0,\pi)$, $\therefore A=\frac{\pi}{4}$. ……6 分

（Ⅱ）若选择条件①，由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$，得 $a\sin C=c\sin A=\frac{\sqrt{2}}{2}c=2$.

$\therefore c=2\sqrt{2}$. ……9 分

又 $2\sqrt{2}\sin B=3\sin C$，即 $2\sqrt{2}b=3c$.

$\therefore b=3$. ……11 分

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times 3\times 2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}=3$. ……12 分

若选择条件②，由 $2\sqrt{2}\sin B=3\sin C$，即 $2\sqrt{2}b=3c$.

设 $c=2\sqrt{2}m$，$b=3m(m>0)$. ……7 分

则 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=5m^2$. $\therefore a=\sqrt{5}m$. ……9 分

由 $ac=2\sqrt{10}$，得 $m=1$.

$\therefore a=\sqrt{5}$，$b=3$，$c=2\sqrt{2}$. ……11 分

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times 3\times 2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}=3$. ……12 分

19. **解**：（Ⅰ）$\because DE\parallel AB$，$DE\not\subset$ 平面 PAB，$AB\subset$ 平面 PAB，

$\therefore DE\parallel$ 平面 PAB. ……2 分

$\because DE\subset$ 平面 PDE，平面 $PDE\cap$ 平面 $PAB=l$，

$\therefore DE\parallel l$. ……3 分

由图① $DE\perp AC$，得 $DE\perp DA$，$DE\perp DP$，

$\therefore l\perp DA$，$l\perp DP$.

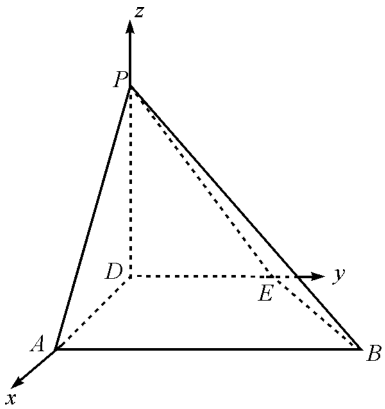
$\because DA$，$DP\subset$ 平面 ADP，$DA\cap DP=D$，

$\therefore l\perp$ 平面 ADP. ……5 分

（Ⅱ）由题意，得 $DE=DP=2$，$DA=1$.

$\because AP=\sqrt{5}=\sqrt{DP^2+DA^2}$，$\therefore DA\perp DP$. ……6 分

又 $DE\perp DP$，$DE\perp DA$，以 D 为坐标原点，$\overrightarrow{DA}$，$\overrightarrow{DE}$，$\overrightarrow{DP}$ 的方向分别为 x 轴，y 轴，z 轴正方向，建立如图所示的空间直角坐标系 $Dxyz$.



则 $D(0,0,0)$，$E(0,2,0)$，$B(1,3,0)$，$P(0,0,2)$，

$\overrightarrow{PD}=(0,0,-2)$，$\overrightarrow{PE}=(0,2,-2)$，$\overrightarrow{PB}=(1,3,-2)$. ……8 分

设平面 PBE 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$.

由 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PE}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PB}=0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}y-z=0,\\ x+3y-2z=0.\end{cases}$

令 $z=1$，得 $\boldsymbol{n}=(-1,1,1)$. ……10 分

设 PD 与平面 PEB 所成角为 θ.

$\therefore \sin\theta=|\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{PD}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PD}|}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{PD}|}=\frac{2}{2\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$. ……11 分

$\therefore$ 直线 PD 与平面 PEB 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$. ……12 分

20. **解**:(Ⅰ)由△ DF_1F_2 为等边三角形,$|DF_1|=|DF_2|=a$,得 $a=2c$(c 为半焦距). ……1 分

∵ $|AF_1|+|AF_2|=2a$,$|BF_1|+|BF_2|=2a$,

∴ △ F_1AB 的周长为 $4a=8$,得 $a=2$. ……2 分

∴$c=1$,$b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{3}$.

∴椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. ……4 分

(Ⅱ)设 x 轴上存在定点 $T(t,0)$,由(Ⅰ)知 $F_2(1,0)$.

由题意知直线 l 斜率不为 0.设直线 $l:x=my+1$,$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$.

由 $\begin{cases} x=my+1, \\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1 \end{cases}$ 消去 x,得 $(3m^2+4)y^2+6my-9=0$.

显然 $\Delta=144(m^2+1)>0$. ……5 分

∴ $y_1+y_2=\frac{-6m}{3m^2+4}$,$y_1y_2=\frac{-9}{3m^2+4}$. ……6 分

∵ $\overrightarrow{TA}\cdot\overrightarrow{TB}=(x_1-t)(x_2-t)+y_1y_2=(my_1+1-t)(my_2+1-t)+y_1y_2$

$=(m^2+1)y_1y_2+(1-t)m(y_1+y_2)+(1-t)^2$ ……7 分

$=(m^2+1)\cdot\frac{-9}{3m^2+4}+(1-t)m\cdot\frac{-6m}{3m^2+4}+(1-t)^2$

$=\frac{(6t-15)m^2-9}{3m^2+4}+(1-t)^2$, ……10 分

故当 $\frac{6t-15}{3}=\frac{-9}{4}$,即 $t=\frac{11}{8}$ 时,$\overrightarrow{TA}\cdot\overrightarrow{TB}$ 为定值 $-\frac{135}{64}$.

∴存在定点 $T(\frac{11}{8},0)$,使得 $\overrightarrow{TA}\cdot\overrightarrow{TB}$ 为定值. ……12 分

21. **解**:(Ⅰ)当 $a=1$ 时,$f(x)=\ln x$.

由题意知曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切点为 $(1,0)$.

∵ $f'(x)=\frac{1}{x}$,∴$k=f'(1)=1$. ……1 分

∴曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程为 $y=x-1$. ……2 分

记 $g(x)=f(x)-kx-b=\ln x-x+1$.

∵$g'(x)=\frac{1-x}{x}$,∴$g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增,在 $(1,+\infty)$ 上单调递减. ……4 分

∴ $g(x)\leqslant g(1)=0$. 即 $\ln x\leqslant kx+b$ 成立. ……5 分

(Ⅱ)记 $h(x)=(x-1)e^{x-a}-f(x)=(x-1)e^{x-a}-\ln x-\ln a$,$x>0$.

则 $h(x)\geqslant 0$ 恒成立.

∵$h'(x)=xe^{x-a}-\frac{1}{x}$,$h'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,

∵$h'(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}-a}-2<0$,$h'(a+1)=(a+1)e-\frac{1}{a+1}>0$,

$\therefore \exists x_0 \in (\frac{1}{2}, a+1)$，使得 $h'(x_0)=0$，即 $x_0 e^{x_0-a}=\frac{1}{x_0}$.　…(*)　……6 分

$\therefore$ 当 $x\in(0,x_0)$,$h'(x)<0$,$h(x)$ 单调递减;当 $x\in(x_0,+\infty)$,$h'(x)>0$,$h(x)$ 单调递增.

$\therefore h(x)_{\min}=h(x_0)=(x_0-1)e^{x_0-a}-\ln x_0-\ln a$.　…(**)　……7 分

由(*)式,可得 $e^{x_0-a}=\frac{1}{x_0^2}$,$a=x_0+2\ln x_0$.

代入(**)式,得 $h(x_0)=\frac{x_0-1}{x_0^2}-\ln x_0-\ln(x_0+2\ln x_0)$.　……8 分

当 $x_0\in(1,+\infty)$ 时,记 $t(x)=\frac{x-1}{x^2}-\ln x$.

$\because t'(x)=\frac{(1-x)(x+2)}{x^3}<0$，$\therefore t(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减.

$\because y=-\ln(x+2\ln x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递减，

$\therefore h(x_0)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减.

$\therefore$ 当 $x_0\in(1,+\infty)$ 时，$h(x_0)<h(1)=0$，不合题意；　……9 分

当 $x_0\in(\frac{1}{2},1]$ 时,由(Ⅰ)知 $\ln x\leqslant x-1$，故 $-\ln x_0\geqslant 1-x_0$，

$-\ln(x_0+2\ln x_0)\geqslant 1-(x_0+2\ln x_0)$

$\therefore h(x_0)=\frac{x_0-1}{x_0^2}-\ln x_0-\ln(x_0+2\ln x_0)\geqslant\frac{x_0-1}{x_0^2}-\ln x_0+1-(x_0+2\ln x_0)$

$=\frac{x_0-1}{x_0^2}-3\ln x_0-x_0+1\geqslant\frac{x_0-1}{x_0^2}-3(x_0-1)-x_0+1$

$=\frac{(1-x_0)(2x_0-1)(2x_0+1)}{x_0^2}$.

由 $x_0\in(\frac{1}{2},1]$，$\therefore h(x_0)\geqslant 0$. 故满足 $f(x)\leqslant(x-1)e^{x-a}$.　……11 分

又 $a=x_0+2\ln x_0$,$y=x+2\ln x$ 在 $(\frac{1}{2},1]$ 上单调递增,$a\in(\frac{1}{2}-2\ln 2,1]$且 $a>0$,

$\therefore$ 实数 a 的取值范围是 $(0,1]$.　……12 分

22. **解**:(Ⅰ)由圆 C_1 的参数方程消去参数 t，得圆 C_1 的普通方程为

$(x-2)^2+y^2=1$，圆心 $A(2,0)$.　……2 分

把 $x=\rho\cos\theta$,$y=\rho\sin\theta$ 代入 $(x-2)^2+y^2=1$，　……3 分

化简得圆 C_1 的极坐标方程为 $\rho^2-4\rho\cos\theta+3=0$.　……5 分

(Ⅱ)由题意,在极坐标系中,点 $A(2,0)$.

$\because$ 点 B 在曲线 C_2 上,设 $B(2-2\cos\theta,\theta)$.　……6 分

在$\triangle AOB$ 中,由余弦定理有 $AB^2=OA^2+OB^2-2OA\cdot OB\cdot\cos\angle AOB$，

即 $3=4+(2-2\cos\theta)^2-2\times 2(2-2\cos\theta)\cos\theta$.

化简得 $12\cos^2\theta-16\cos\theta+5=0$.　……8 分

解得 $\cos\theta=\frac{1}{2}$ 或 $\cos\theta=\frac{5}{6}$.

故 $\rho=2-2\cos\theta=1$ 或 $\rho=2-2\cos\theta=\frac{1}{3}$.

∴点 B 的极径为 1 或 $\frac{1}{3}$. ……10 分

23. **解**:(Ⅰ)当 $a=1, b=\frac{1}{2}$ 时, $f(x)=|x-3|+|x+2|$. ……1 分

当 $x\leqslant-2$ 时, $f(x)=1-2x\geqslant7$, 解得 $x\leqslant-3$; ……3 分

当 $-2<x<3$ 时, $f(x)=5\geqslant7$, 此时无解; ……4 分

当 $x\geqslant3$ 时, $f(x)=2x-1\geqslant7$, 解得 $x\geqslant4$. ……2 分

综上,不等式 $f(x)\geqslant7$ 的解集为 $(-\infty,-3]\cup[4,+\infty)$. ……5 分

(Ⅱ)由 $f(x)=|x-3a|+|x+4b|\geqslant|x+4b-(x-3a)|=|3a+4b|$,

当且仅当 $-4b\leqslant x\leqslant3a$ 时,等号成立.

∵$a\geqslant0, b\geqslant0$.

∴$f(x)_{\min}=|3a+4b|=3a+4b=6$. ……7 分

由柯西不等式,得 $\sqrt{3a}+\sqrt{b}=1\cdot\sqrt{3a}+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{4b}\leqslant\sqrt{1^2+(\frac{1}{2})^2}\cdot\sqrt{3a+4b}=\frac{\sqrt{30}}{2}$.

……9 分

当且仅当 $2=\frac{\sqrt{3a}}{\sqrt{4b}}$ 时,即 $a=\frac{8}{5}, b=\frac{3}{10}$ 等号成立.

综上, $\sqrt{3a}+\sqrt{b}$ 的最大值为 $\frac{\sqrt{30}}{2}$. ……10 分