成都市 2020 级高中毕业班第二次诊断性检测

数学(理科)参考答案及评分意见

第Ⅰ卷 (选择题,共 60 分)

一、选择题:(每小题 5 分,共 60 分)

1. C; 2. C; 3. B; 4. C 5. A; 6. B; 7. D 8. A; 9. B; 10. D; 11. A; 12. D.

第Ⅱ卷 (非选择题,共 90 分)

二、填空题:(每小题 5 分,共 20 分)

13. $\sqrt{2}$; 14. $-\dfrac{3}{5}$; 15. $\sqrt{31}$; 16. $(0,\dfrac{3}{e^2})$.

三、解答题:(共 70 分)

17. 解:(Ⅰ)由题意,列联表如下:

报名班型	课程		合计
	“劳育课程”	“美育课程”	
文科班	35	35	70
理科班	10	20	30
合计	45	55	100

……6 分

(Ⅱ)$\because K^2=\dfrac{100\times(35\times20-35\times10)^2}{45\times55\times70\times30}=\dfrac{700}{297}\approx2.357<6.635$, ……10 分

$\therefore$没有 99%的把握认为“劳育课程”“美育课程”的选择与文理科有关. ……12 分

18. 解:(Ⅰ)设数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q.

$\because a_1, a_2+3, a_3-6$ 成等差数列,

$\therefore 2(a_2+3)=a_1+a_3-6$. ……2 分

$\therefore 2a_1q+6=a_1+a_1q^2-6$. ……3 分

$\because q=3$,

$\therefore$ 解得 $a_1=3$. ……5 分

$\therefore a_n=3^n$. ……6 分

(Ⅱ)设 $b_n=na_n$,则 $b_n=n\cdot3^n$.

$\therefore T_n=3+2\times3^2+3\times3^3+\cdots+n\times3^n$ ①

$\therefore 3T_n=3^2+2\times3^3+3\times3^4+\cdots+n\times3^{n+1}$ ②

由①-②得,$-2T_n=3+3^2+3^3+\cdots+3^n-n\cdot3^{n+1}$ ……8 分

$\therefore -2T_n=\dfrac{3\times(1-3^n)}{1-3}-n\cdot3^{n+1}$ ……10 分

$\therefore T_n=\dfrac{(2n-1)3^{n+1}+3}{4}$.　　　　……12 分

19. 解:（Ⅰ）取 B_1C_1 的中点 O，连接 AO，A_1O．

$\because \triangle A_1B_1C_1$ 与 $\triangle AB_1C_1$ 均是边长为 2 的正三角形，

$\therefore AO\perp B_1C_1, A_1O\perp B_1C_1, A_1O=AO=\sqrt{3}$．　　　　……2 分

$\therefore \angle AOA_1$ 为二面角 $A-B_1C_1-A_1$ 的平面角.　　　　……3 分

$\because AA_1=\sqrt{6}$，

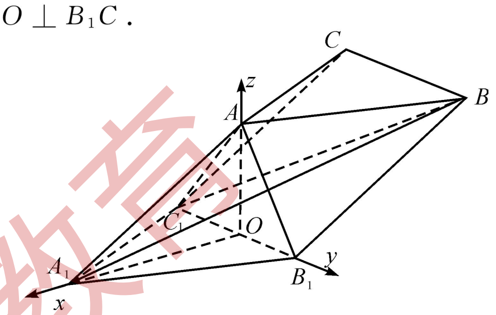
$\therefore A_1O^2+AO^2=A_1A^2$.

$\therefore A_1O\perp AO$．　　　　……5 分

$\therefore$平面 $AB_1C_1\perp$ 平面 $A_1B_1C_1$.　　　　……6 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，$A_1O\perp AO, AO\perp B_1C_1, A_1O\perp B_1C$．

以 O 为坐标原点，$\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OB_1}, \overrightarrow{OA}$ 的方向分别为 x 轴，y 轴，z 轴正方向，建立如图所示的空间直角坐标系 $Oxyz$．则 $A_1(\sqrt{3},0,0)$，$C_1(0,-1,0)$，$A(0,0,\sqrt{3})$，$B(-\sqrt{3},1,\sqrt{3})$．



$\overrightarrow{A_1C_1}=(-\sqrt{3},-1,0)$，$\overrightarrow{AC_1}=(0,-1,-\sqrt{3})$，

$\overrightarrow{BA_1}=(2\sqrt{3},-1,-\sqrt{3})$.　　　　……8 分

设平面 A_1C_1B 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_1,y_1,z_1)$．

由 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_1C_1}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BA_1}=0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}\sqrt{3}x_1+y_1=0,\\ 2\sqrt{3}x_1-y_1-\sqrt{3}z_1=0.\end{cases}$

令 $x_1=1$，得 $\boldsymbol{n}=(1,-\sqrt{3},3)$．　　　　……9 分

设平面 A_1C_1CA 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_2,y_2,z_2)$．

由 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{A_1C_1}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AC_1}=0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}\sqrt{3}x_2+y_2=0,\\ y_2+\sqrt{3}z_2=0.\end{cases}$

令 $x_2=1$，得 $\boldsymbol{m}=(1,-\sqrt{3},1)$．　　　　……10 分

$\therefore \cos<\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}>=\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{m}|}=\dfrac{7}{\sqrt{13}\times\sqrt{5}}=\dfrac{7\sqrt{65}}{65}$．　　　　……11 分

$\therefore$所求锐二面角的余弦值为 $\dfrac{7\sqrt{65}}{65}$．　　　　……12 分

20. 解:（Ⅰ）由题意，双曲线 $\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$ 的焦点为 $F_1(-\sqrt{5},0)$，$F_2(\sqrt{5},0)$，

$\because$ 双曲线 $\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$ 与椭圆 C 有相同焦点且在第一象限交点为 P，

又 $|PF_2|=1$，$\therefore |PF_1|=5$，$|PF_1|+|PF_2|=6$.　　　　……2 分

$\therefore 2a=6, a=3$.　　　　……3 分

$\therefore b^2=4$.

$\therefore$ 椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$. ……4 分

(Ⅱ)设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则 $D(mx_2,my_2)$.

$\because$ 四边形 $OAED$ 为平行四边形,

$\therefore \overrightarrow{OD}=\overrightarrow{AE}$,$E(x_1+mx_2,y_1+my_2)$.

$\because$ 点 A,B,E 均在椭圆 C 上,

$\therefore \dfrac{x_1^2}{9}+\dfrac{y_1^2}{4}=1,\dfrac{x_2^2}{9}+\dfrac{y_2^2}{4}=1,\dfrac{(x_1+mx_2)^2}{9}+\dfrac{(y_1+my_2)^2}{4}=1$.

$\because m>0$,

$\therefore 4x_1x_2+9y_1y_2+18m=0$. ……7 分

$\therefore (4+9k^2)x_1x_2+9k(x_1+x_2)+9+18m=0$. ……8 分

由 $\begin{cases} y=kx+1, \\ \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1 \end{cases}$ 消去 y,得 $(9k^2+4)x^2+18kx-27=0$.

显然 $\Delta=432(3k^2+1)>0$.

$\therefore x_1+x_2=\dfrac{-18k}{9k^2+4}$,$x_1x_2=\dfrac{-27}{9k^2+4}$. ……9 分

$\therefore \dfrac{-27}{9k^2+4}\times(4+9k^2)-\dfrac{18k}{9k^2+4}\times 9k+18m+9=0$.

$\therefore m=2-\dfrac{4}{9k^2+4}$. ……11 分

$\therefore m\in[1,2)$. ……12 分

21. 解:(Ⅰ)$\because f'(x)=\dfrac{x^{a-1}e^{2x}(2x-a)}{x^{2a}}$. ……2 分

$\because x>0,a\in\mathbf{R}$

$\therefore$ 当 $a\leqslant 0$ 时,$f'(x)\geqslant 0$ 恒成立,函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增. ……3 分

当 $a>0$ 时,

当 $0<x<\dfrac{a}{2}$ 时,$f'(x)<0$;当 $x>\dfrac{a}{2}$ 时,$f'(x)>0$.

函数 $f(x)$ 在 $(0,\dfrac{a}{2})$ 上单调递减,在 $(\dfrac{a}{2},+\infty)$ 上单调递增. ……4 分

综上所述,当 $a\leqslant 0$ 时,函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,+\infty)$,无单调递减区间;

当 $a>0$ 时,函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(0,\dfrac{a}{2})$,单调递增区间为 $(\dfrac{a}{2},+\infty)$.

……5 分

(Ⅱ)函数 $g(x)=a\ln x+\dfrac{f(x)}{e^2}-2x+1$ 恰有两个零点,

等价于方程 $\dfrac{e^{2x}}{e^2x^a}=2x-1-a\ln x$ 有两个不等的实数解.

$\because x>0, a>0, \dfrac{e^{2x}}{e^2x^a}=2x-1-a\ln x=\ln e^{2x}-\ln e-\ln x^a=\ln\dfrac{e^{2x-1}}{x^a}$,

令 $t=\dfrac{e^{2x-1}}{x^a}>0$,则 $\dfrac{t}{e}=\ln t$.

令 $h(t)=\ln t-\dfrac{t}{e}$,则 $h'(t)=\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{e}$.

$\therefore$ 当 $0<t<e$ 时,$h'(t)>0$;当 $t>e$ 时,$h'(t)<0$.

$\therefore$ 函数 $h(t)$ 在 $(0,e)$ 上单调递增,在 $(e,+\infty)$ 上单调递减.

$\because h(e)=0$,

$\therefore$ 方程 $\dfrac{t}{e}=\ln t$ 有唯一解 $t=e$.

$\therefore$ 方程$\dfrac{e^{2x}}{e^2x^a}=2x-1-a\ln x$ 有两个不等的实数解等价于方程 $e=\dfrac{e^{2x-1}}{x^a}$ 有两个不相等的实数解. ……7 分

等价于方程 $a\ln x=2x-2$ 有两个不相等的实数解.

构造函数 $k(x)=a\ln x-2x+2$,则 $k'(x)=\dfrac{a}{x}-2$.

$\because a>0$,

$\therefore$ 当 $0<x<\dfrac{a}{2}$ 时,$k'(x)>0$;当 $x>\dfrac{a}{2}$ 时,$k'(x)<0$.

$\therefore$ 函数 $k(x)$ 在 $(0,\dfrac{a}{2})$ 上单调递增,在 $(\dfrac{a}{2},+\infty)$ 上单调递减.

$\because x\to 0^+, k(x)\to-\infty; x\to+\infty, k(x)\to-\infty$.

$\therefore$ 只需要 $k(\dfrac{a}{2})=a\ln\dfrac{a}{2}-a+2>0$,即 $\ln\dfrac{a}{2}+\dfrac{2}{a}-1>0$. ……9 分

构造函数 $m(a)=\ln\dfrac{a}{2}+\dfrac{2}{a}-1$,则 $m'(a)=\dfrac{1}{a}-\dfrac{2}{a^2}$.

$\therefore$ 当 $0<a<2$ 时,$m'(a)<0$;当 $a>2$ 时,$m'(a)>0$.

$\therefore$ 函数 $m(a)$ 在 $(0,2)$ 上单调递减,在 $(2,+\infty)$ 上单调递增.

$\because m(2)=0$,

$\therefore$ 当 $a\neq 2$ 时,$\ln\dfrac{a}{2}+\dfrac{2}{a}-1>0$ 恒成立. ……11 分

$\therefore a$ 的取值范围为 $(0,2)\cup(2,+\infty)$. ……12 分

22. 解:(Ⅰ)$\because$ 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=3t^2\\y=3t\end{cases}$ (t 为参数),

$\therefore$ 曲线 C 的普通方程为 $y^2=3x$. ……2 分

$\because$ 直线 l 的极坐标方程为 $2\rho\sin(\theta+\dfrac{\pi}{6})=3$,

$\therefore \sqrt{3}\rho\sin\theta+\rho\cos\theta=3$. ……3 分

$\because x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$，

$\therefore$ 直线 l 的直角坐标方程为 $x+\sqrt{3}y-3=0$. ……5 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，点 P 在直线 l 上，

$\therefore$ 直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x=-3-\dfrac{\sqrt{3}}{2}m \\ y=2\sqrt{3}+\dfrac{1}{2}m \end{cases}$（$m$ 为参数），……7 分

代入 $y^2=3x$ 得，$m^2+14\sqrt{3}m+84=0$.

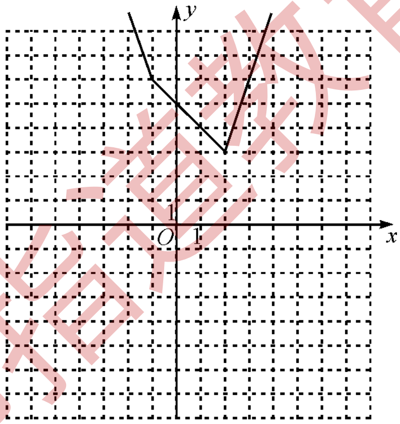
设 m_1, m_2 是上述方程的两根，

$\therefore \Delta>0, m_1+m_2=-14\sqrt{3}, m_1m_2=84>0$. ……9 分

$\therefore |PA|+|PB|=|m_1|+|m_2|=|m_1+m_2|=14\sqrt{3}$. ……10 分

23. 解：（Ⅰ）由题得，$f(x)=|x+1|+2|x-2|=\begin{cases} -3x+3, x\leqslant -1 \\ -x+5, -1<x<2 \\ 3x-3, x\geqslant 2. \end{cases}$ ……3 分

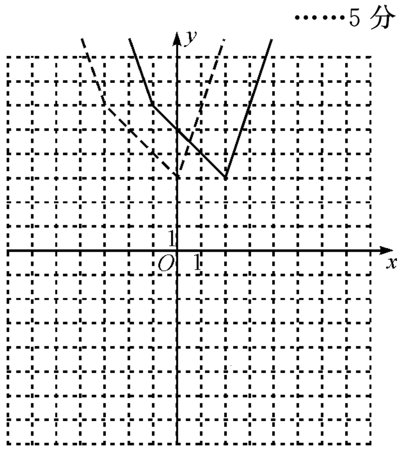
函数 $y=f(x)$ 的图象为



……5 分

（Ⅱ）函数 $y=f(x)$ 的图象向左平移 2 个单位长度后得到函数 $y=f(x+2)$ 的图象，$y=f(x)$ 的图象与 $y=f(x+2)$ 的图象如右图所示.

……7 分



当 $x\in(0,2)$ 时，由 $f(x+2)=f(x)$ 解得，$x=\dfrac{1}{2}$.

……9 分

由图象可知不等式 $f(x+2)>f(x)$ 的解集为 $(\dfrac{1}{2}, +\infty)$. ……10 分