绵阳市高中 2020 级第三次诊断性考试

文科数学参考答案及评分意见

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分．

CABBA　　CDDCA　　CB

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13．3　　14．$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　15．$\dfrac{4}{3}$　　16．$\dfrac{1}{2}$

三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分．

17．**解：**（1）用平均数估计总体，

在某个销售门店春季新款的年销售额的是 33 万元，……………………………… 2 分

用中位数估计总体，

在某个销售门店春季新款的年销售额的是 31.5 万元．…………………………… 4 分

（2）6 个销售门店分别记为 A，B，C，D，E，F．

年销售额不低于 40 万元的有：A，D．……………………………………………5 分

从 A，B，C，D，E，F 中随机抽取 2 个，基本事件为：$\{A，B\}$，$\{A，C\}$，$\{A，D\}$，$\{A，E\}$，$\{A，F\}$，$\{B，C\}$，$\{B，D\}$，$\{B，E\}$，$\{B，F\}$，$\{C，D\}$，$\{C，E\}$，$\{C，F\}$，$\{D，E\}$，$\{D，F\}$，$\{E，F\}$，共计 15 个基本事件．……………………………… 8 分

事件：“恰好抽到 1 个门店的年销售额不低于 40 万元”包含的基本事件为：

$\{A，B\}$，$\{A，C\}$，$\{A，E\}$，$\{A，F\}$，$\{B，D\}$，$\{C，D\}$，

$\{E，D\}$，$\{F，E\}$，……………………………………………………………… 10 分

$\therefore$所求概率为 $P=\dfrac{8}{15}$．……………………………………………………12 分

18．**解：**（1）证明：如图，取 AC 的中点为 O，连接 BO，PO．

$\because PA=PC$，$\therefore PO\perp AC$，……………………………………………………1 分

$\because PA=PC=2\sqrt{2}，AC=4$，$\therefore \angle APC=90°$，……………………………… 2 分

$\therefore PO=\dfrac{1}{2}AC=2$，同理 $BO=2$，……………………………………………… 3 分

又 $PB=2\sqrt{2}$，则 $PO^2+OB^2=PB^2$，

$\therefore PO\perp OB$，………………………………………………………………………4 分

$\because AC\cap OB=O$，AC，$OB\subset$平面 ABC，

$\therefore PO\perp$平面 ABC，………………………………………………………………… 5 分

又 $PO\subset$ 平面 PAC，

∴平面 $PAC\perp$ 平面 ABC；……6 分

（2）∵点 M 是线段 AP 上，且 $PM=\frac{1}{3}PA$，

过点 M 作 $MN\perp AC$，$MN/\!/PO$，……7 分

∴ $MN\perp$ 平面 ABC，……8 分

$V_{P-MBC}=V_{P-ABC}-V_{M-ABC}$ …… 10 分

$=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot(PO-MN)$ …… 11 分

$=\frac{1}{3}\times 4\times\frac{2}{3}=\frac{8}{9}$． ……12 分

19．**解：**（1）由 $S_n=\log_{\sqrt{3}}(T_n)$，令 n=1，

得 a_1=$S_1=\log_{\sqrt{3}}(T_1)=\log_{\sqrt{3}}(b_1)=\log_{\sqrt{3}}\frac{1}{3}=-2$，

∴ $a_1=-2$，……2 分

又∵ $a_4=4=a_1+3d$，

∴等差数列$\{a_n\}$的公差 $d=2$，$a_n=2n-4$，……4 分

∴ $S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=n^2-3n$． ……6 分

（2）由（1）可知 $T_n=(\sqrt{3})^{n^2-3n}$， ……7 分

当 n≥2 时，$T_{n-1}=(\sqrt{3})^{(n-1)^2-3(n-1)}=(\sqrt{3})^{n^2-5n+4}$，……8 分

所以当 n≥2 时，$b_n=\frac{T_n}{T_{n-1}}=(\sqrt{3})^{2n-4}=3^{n-2}$；…… 10 分

当 $n=1$ 时，$b_1=\frac{1}{3}$ 也满足上式，……11 分

所以 $b_n=3^{n-2}$ ($n\in N^*$)． ……12 分

20．**解：**（1）当 $a=3$ 时，$f(x)=\ln x+x^2-3x$，$f'(x)=\frac{1}{x}+2x-3$，…… 2 分

因为切点为 $(1,-2)$，所以切线斜率为：$k=f'(1)=0$，……3 分

所以曲线 $f(x)$ 在 $x=1$ 处切线的方程为：$y=-2$． …… 5 分

（2）$f'(x)=\dfrac{a-2}{x}+2x-a=\dfrac{2x^2-ax+a-2}{x}=\dfrac{(x-1)(2x-a+2)}{x}$， ………………6 分

令 $f'(x)=0$ 得 $x=1$ 或 $x=\dfrac{a}{2}-1$， ……………………………………………… 7 分

①当 $a\leqslant 4$ 时，$f(x)$ 在 $[1，e]$ 上单调递增，

此时 $f(1)=1-a$，$f(e)=(1-e)a+e^2+2$，

当 $1-a>0$，即 $a<1$ 时，$f(x)$ 在区间 $[1，e]$ 上无零点；

当 $\begin{cases}1-a\le 0\\ f(e)\ge 0\end{cases}$，即 $1\leqslant a\leqslant\dfrac{e^2-2}{e-1}$ 时，$f(x)$ 在区间 $[1，e]$ 上有一个零点；

当 $f(e)<0$，即 $\dfrac{e^2-2}{e-1}<a\leqslant 4$ 时，$f(x)$ 在区间 $[1，e]$ 上无零点；……………… 9 分

②当 $\dfrac{a}{2}-1\geqslant e$，即 $a\geqslant 2e+2$ 时，$f(x)$ 在 $[1，e]$ 上单调递减，

此时 $f(1)=1-a<0$，$f(x)$ 在区间 $[1，e]$ 上无零点. ……………………………10 分

③当 $4<a<2e+2$ 时，$f(x)$ 在 $[1，\dfrac{a}{2}-1]$ 上单调递减，在 $[\dfrac{a}{2}-1，e]$ 上单调递增，

此时 $f(1)=1-a<0$，$f(e)=(1-e)a+e^2+2<0$，$f(x)$ 在区间 $[1，e]$ 上无零点. 11 分

综上：当 $a\leqslant 1$ 或 $a>\dfrac{e^2-2}{e-1}$ 时，$f(x)$ 在区间 $[1，e]$ 上无零点；

当 $1\leqslant a\leqslant\dfrac{e^2-2}{e-1}$ 时，$f(x)$ 在区间 $[1，e]$ 上有一个零点. ……………………… 12 分

21．**解**：（1）设 $M(x_1，y_1)$，$N(x_2，y_2)$，直线 l：$y=x-2$， ……………………………1 分

联立方程 $\begin{cases}x=y+2\\ y^2=2px\end{cases}$，整理得：$y^2-2py-4p=0$， ………………………………2 分

由韦达定理：$\begin{cases}y_1+y_2=2p\\ y_1y_2=-4p\end{cases}$， ……………………………………………………… 3 分

$$|MN|=\sqrt{1+t^2}\,|y_1-y_2|=\sqrt{1+t^2}\cdot\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}$$

$$=\sqrt{1+1^2}\cdot\sqrt{4p^2+16p}=3\sqrt{2}$$， ……………………………………………… 4 分

解得：$p=\dfrac{1}{2}$，故抛物线的方程为：$y^2=x$. ……………………………………5 分

（2）延长 PN 交 x 轴于点 Q，设 $M(x_1，y_1)$，$N(x_2，y_2)$，$P(x_3，y_3)$，

设直线 MN 的方程为：$x=ty+2$，…………………………………………………… 6 分

联立直线 MN 与抛物线 C 方程可得：$\begin{cases}x=ty+2\\y^2=x\end{cases}$，整理得：$y^2-ty-2=0$，

由根与系数的关系：$y_1y_2=-2$ ①，………………………………………………………… 8 分

同理，联立直线 MP 与抛物线 C 方程可得：$\begin{cases}x=ny+3\\y^2=x\end{cases}$，

整理得：$y^2-ny-3=0$，可得 $y_1y_3=-3$ ②，……………………………………… 10 分

由①②可知，$\dfrac{y_2}{y_3}=\dfrac{2}{3}$，…………………………………………………………… 11 分

$\therefore \dfrac{|QN|}{|QP|}=\dfrac{|y_2|}{|y_3|}=\dfrac{2}{3}$．…………………………………………………………… 12 分

22．**解**：（1）可得圆 C 的标准方程为：$(x-2)^2+y^2=4$，

∴圆 C 是以 C（2，0）为圆心，2 为半径的圆，………………………………… 2 分

∴圆 C 的参数方程为：$\begin{cases}x=2+2\cos\alpha\\y=2\sin\alpha\end{cases}$（$\alpha$ 为参数）．……………………… 5 分

（2）∵$|AB|=2\sqrt{2}$，可得 $\angle ACB=\dfrac{\pi}{2}$，……………………………………… 6 分

不妨设点 A 所对应的参数为 α，则点 B 所对应的参数为 $\alpha+\dfrac{\pi}{2}$，

∴ $A(2+2\cos\alpha,\ 2\sin\alpha)$，则 $B(2+2\cos(\alpha+\dfrac{\pi}{2}),\ 2\sin(\alpha+\dfrac{\pi}{2}))$，

即 $B(2-2\sin\alpha,\ 2\cos\alpha)$，……………………………………………………… 7 分

∴ $\begin{cases}x_1=2+2\cos\alpha\\y_1=2\sin\alpha\end{cases}$，$\begin{cases}x_2=2-2\sin\alpha\\y_2=2\cos\alpha\end{cases}$，

∴ $x_1x_2+y_1y_2=(2+2\cos\alpha)\cdot(2-2\sin\alpha)+2\sin\alpha\cdot 2\cos\alpha$ …………………… 8 分

$$=4+4(\cos\alpha-\sin\alpha)=4+4\sqrt{2}\cos(\alpha+\frac{\pi}{4})$$，……………………9 分

∵ $\alpha\in[0,\ 2\pi]$，则 $\alpha+\dfrac{\pi}{4}\in[\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{9\pi}{4}]$，

∴当 $\cos(\alpha+\dfrac{\pi}{4})=1$，即 $\alpha=\dfrac{7\pi}{4}$ 时，$x_1y_1+x_2y_2$ 的最大值为 $4+4\sqrt{2}$．………… 10 分

23．**解**：（1）由 $a=1$，则 $2b+3c=3$，

由柯西不等式，得 $(2b+3c)[(\frac{1}{\sqrt{2}})^2+(\frac{1}{\sqrt{3}})^2]\geqslant(\sqrt{b}+\sqrt{c})^2$， ………………………… 2 分

$\therefore (\sqrt{b}+\sqrt{c})^2\leqslant 3\times(\frac{1}{2}+\frac{1}{3})=\frac{5}{2}$，3 分

$\therefore \sqrt{b}+\sqrt{c}\leqslant\frac{\sqrt{10}}{2}$，当且仅当 $b=\frac{9}{10}$，$c=\frac{2}{5}$ 时等号成立．…………………………5 分

（2）$\because a+2b+3c=4$，即 $2b+3c=4-a$，

又 $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=2$，则 $\sqrt{b}+\sqrt{c}=2-\sqrt{a}$，……………………………………6 分

又由（1）可得：$(2b+3c)\left[(\frac{1}{\sqrt{2}})^2+(\frac{1}{\sqrt{3}})^2\right]\geqslant(\sqrt{b}+\sqrt{c})^2$，………………………… 7 分

$\therefore (4-a)\frac{5}{6}\geqslant(2-\sqrt{a})^2$，即 $11a-24\sqrt{a}+4\leqslant 0$，……………………………………8 分

令 $\sqrt{a}=t$，所以 $11t^2-24t+4\leqslant 0$，

解得：$\frac{2}{11}\leqslant t\leqslant 2$，即 $\frac{4}{121}\leqslant a\leqslant 4$，……………………………………………9 分

又 $2b+3c=4-a$，且 $b>0$，$c>0$，

$\therefore 4-a>0$，即 $a<4$，

综上可得，$\frac{4}{121}\leqslant a<4$．…………………………………………………… 10 分