绵阳市高中2020级第三次诊断性考试

理科数学参考答案及评分意见

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，共60分．

CBDAC　AADCB　BA

二、填空题：本大题共4小题，每小题5分，共20分．

13．3　　14．2　　15．1　　16．$\dfrac{2\lambda}{\lambda+1}$

三、解答题：本大题共6小题，共70分．

17．解：（1）抽取的3个销售终端中至少有2个销售终端的年销售额超过40万元的概率

$P=\dfrac{C_4^2C_{16}^1+C_4^3}{C_{20}^3}=\dfrac{5}{57}$． ………………………………………………5分

（2）由样本估计总体，从全国随机抽取1个销售终端，春季新款的年销售额超过40万元的概率是$\dfrac{1}{5}$，随机变量$\xi\sim B(3,\ \dfrac{1}{5})$． ………………………………6分

$P(\xi=0)=C_3^0(\dfrac{1}{5})^0(\dfrac{4}{5})^3=\dfrac{64}{125}$， ………………………………………7分

$P(\xi=1)=C_3^1\times\dfrac{1}{5}\times(\dfrac{4}{5})^2=\dfrac{48}{125}$， ………………………………………8分

$P(\xi=2)=C_3^2(\dfrac{1}{5})^2\times\dfrac{4}{5}=\dfrac{12}{125}$， ………………………………………9分

$P(\xi=3)=C_3^3(\dfrac{1}{5})^3(\dfrac{4}{5})^0=\dfrac{1}{125}$． ………………………………………10分

ξ的分布列为：

ξ	0	1	2	3
P	$\dfrac{64}{125}$	$\dfrac{48}{125}$	$\dfrac{12}{125}$	$\dfrac{1}{125}$

…………………………………………………………………………11分

∴ξ的期望为：$E(\xi)=np=\dfrac{3}{5}$． ………………………………………12分

18．解：（1）证明：取AC的中点为O，连接BO，PO．

∵$PA=PC$，∴$PO\perp AC$． ………………………………………………1分

$\because PA = PC = 2\sqrt{2}$，$AC = 4$，

$\therefore \angle APC = 90°$， ··· 2 分

$\therefore PO = \dfrac{1}{2}AC = 2$，同理 $BO = 2$． ·· 3 分

又 $PB = 2\sqrt{2}$，可得 $PO^2 + OB^2 = PB^2$，即 $PO \perp OB$． ···································· 4 分

$\because AC \cap OB = O$， AC， $OB \subset$ 平面 ABC，

$\therefore PO \perp$ 平面 ABC． ··5 分

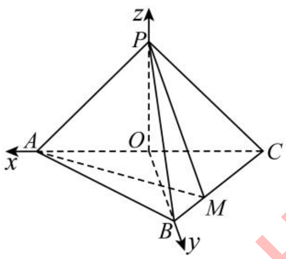
又 $PO \subset$ 平面 PAC，

$\therefore$ 平面 $PAC \perp$ 平面 ABC． ···6 分

（2）$\because PO \perp$ 平面 ABC， $OB \perp AC$，则 $PO \perp OB$．

又 $PO \perp OC$，建立如图所示空间直角坐标系 $O\text{-}xyz$，

则 $A(2,0,0)$， $B(0,2,0)$， $C(-2,0,0)$， $P(0,0,2)$， $M(-\dfrac{2}{3},\dfrac{4}{3},0)$， ············ 7 分



$\therefore \overrightarrow{AP} = (-2,0,2)$， $\overrightarrow{AB} = (-2,2,0)$．

设平面 PAB 的法向量为 $\boldsymbol{n} = (x，y，z)$，

由 $\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AP} = 0, \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} -2x + 2z = 0, \\ -2x + 2y = 0, \end{cases}$ 令 $x = 1$，得 $\boldsymbol{n} = (1，1，1)$， ························9 分

同理，平面 APM 的法向量为 $\boldsymbol{m} = (1,2,1)$， ·· 10 分

$\because \cos\theta = \left|\cos < \vec{m},\vec{n} >\right| = \left|\dfrac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}\right| = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$， ···································· 11 分

$\therefore$ 二面角余弦值为 $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$． ·· 12 分

19．**解：**（1）由 $S_n = \log_{\sqrt{3}}(T_n)$，令 $n=1$，

得 $a_1 = S_1 = \log_{\sqrt{3}}(T_1) = \log_{\sqrt{3}}(b_1) = \log_{\sqrt{3}}\dfrac{1}{3} = -2$，即 $a_1 = -2$， ························· 2 分

又∵ $a_4=a_1+3d=4$，

∴等差数列$\{a_n\}$的公差 $d=2$， $a_n=2n-4$， ……………………………… 4 分

∴ $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}=n^2-3n$， ……………………………………………… 5 分

∴ $T_n=(\sqrt{3})^{n^2-3n}$． ……………………………………………………… 6 分

（2）当 $n\geqslant2$ 时， $T_{n-1}=(\sqrt{3})^{(n-1)^2-3(n-1)}=(\sqrt{3})^{n^2-5n+4}$， ……………………………… 7 分

∴当 $n\geqslant2$ 时， $b_n=\dfrac{T_n}{T_{n-1}}=(\sqrt{3})^{2n-4}=3^{n-2}$， ……………………………………… 8 分

当 $n=1$ 时， $b_1=\dfrac{1}{3}$ 也满足上式，所以 $b_n=3^{n-2}$ ($n\in N^*$)． ……………………… 9 分

∴ $c_n=\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{2n-4}{3^{n-2}}$，

要使 $c_{n-1}=c_n+c_{n+1}$ 成立，即 $\dfrac{2n-6}{3^{n-3}}=\dfrac{2n-4}{3^{n-2}}+\dfrac{2n-2}{3^{n-1}}$， ……………………… 10 分

解得 n=4， ………………………………………………………………………… 11 分

∴ $c_3=\dfrac{2}{3}$， $c_4=\dfrac{4}{9}$， $c_5=\dfrac{2}{9}$，满足： c_4 为 c_3， c_5 的等差中项，

∴存在 n=4 符合题意． …………………………………………………………… 12 分

20．**解**：（1） $f'(x)=\dfrac{2x^2-ax+1}{x}$， …………………………………………………… 1 分

∵ $f(x)$ 在 $(\dfrac{1}{2}, 2)$ 上即有极大值又有极小值，

所以方程 $2x^2-ax+1=0$ 在 $(\dfrac{1}{2}, 2)$ 上有两不等实根， …………………………… 2 分

令 $g(x)=2x^2-ax+1$，则 $\begin{cases}\Delta=a^2-8>0\\ \dfrac{1}{2}<\dfrac{a}{4}<2\\ g(\dfrac{1}{2})=\dfrac{3}{2}-\dfrac{a}{2}>0\\ g(2)=9-2a>0\end{cases}$， ……………………………… 3 分

解得： $2\sqrt{2}<a<3$，

所以实数 a 的取值范围为： $2\sqrt{2}<a<3$． ……………………………………… 5 分

（2）设切点为(x_0, y_0)，其中$x_0 > \dfrac{\sqrt{2}}{2}$，则由题意可得：

$$\begin{cases} \dfrac{2x_0^2 - ax_0 + 1}{x_0} = 1, \\ x_0 - a = \ln x_0 + x_0^2 - ax_0, \end{cases}$$ ………………………………………………………… 6 分

整理得：$a = 2x_0 + \dfrac{1}{x_0} - 1$，………………………………………………………………7 分

$\therefore \ln x_0 - x_0^2 + 2x_0 + \dfrac{1}{x_0} - 2 = 0$，（＊）

令$h(x) = \ln x - x^2 + 2x + \dfrac{1}{x} - 2$（$x > \dfrac{\sqrt{2}}{2}$），

则$h'(x) = \dfrac{1}{x} - 2x + 2 - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{-(x-1)(2x^2-1)}{x^2}$，……………………………………… 8 分

由$2x^2 - 1 > 0$，

易知：$h(x)$在$(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 1)$上单调递增，在$(1, +\infty)$上单调递减．……………………… 9 分

$\therefore h(x) \leqslant h(1) = 0$，所以方程（＊）只有唯一解：$x_0 = 1$，…………………………10 分

所以：$a = 2$．……………………………………………………………………………………12 分

21．**解**：（1）设$M(x_1, y_1)$，$N(x_2, y_2)$，直线l：$y=x-2$，…………………………………1 分

联立方程$\begin{cases} x = y + 2 \\ y^2 = 2px \end{cases}$，整理得：$y^2 - 2py - 4p = 0$，……………………………………2 分

由韦达定理：$\begin{cases} y_1 + y_2 = 2p \\ y_1 y_2 = -4p \end{cases}$，……………………………………………………… 3 分

$$|MN| = \sqrt{1+t^2}\,|y_1 - y_2| = \sqrt{1+t^2} \cdot \sqrt{(y_1+y_2)^2 - 4y_1y_2}$$

$$= \sqrt{1+1^2} \cdot \sqrt{4p^2 + 16p} = 3\sqrt{2}$$，……………………………………………………… 4 分

解得：$p = \dfrac{1}{2}$，故抛物线的方程为：$y^2=x$．……………………………………………5 分

（2）**方法一**：设$y_1=a$，则$M(a^2, a)$，

联立直线MN与抛物线C方程可得：$\begin{cases} x = ty + 2 \\ y^2 = x \end{cases}$，整理得：$y^2 - ty - 2 = 0$；

由韦达定理：$y_1 y_2=-2$，则 $y_2=\dfrac{-2}{a}$； ……………………………………………………7 分

联立直线 MP 与抛物线 C 方程可得：$\begin{cases} x=ny+3 \\ y^2=x \end{cases}$，整理得：$y^2-ny-3=0$，

由韦达定理：$y_1 y_3=-3$，则 $y_3=\dfrac{-3}{a}$． ……………………………………………………8 分

$$\therefore S_{\Delta PMN}=S_{\Delta PAN}+S_{\Delta PAM}=\frac{y_1-y_2}{y_1}S_{\Delta PAM}$$

$$=\frac{(y_1-y_2)(y_1-y_3)}{2y_1}=\frac{1}{2}(y_1+\frac{5}{y_1}+\frac{6}{y_1^3})$$

$$=\frac{1}{2}(\frac{6}{a^3}+\frac{5}{a}+a)$$ ……………………………………………………………10 分

令 $h(a)=\dfrac{6}{a^3}+\dfrac{5}{a}+a$，

$$\therefore h'(a)=\frac{a^4-5a^2-18}{a^4}=\frac{(a^2-\frac{5+\sqrt{97}}{2})(a^2+\frac{\sqrt{97}-5}{2})}{a^4}$$

$$=\frac{(a^2+\frac{\sqrt{97}-5}{2})(a+\sqrt{\frac{5+\sqrt{97}}{2}})(a-\sqrt{\frac{5+\sqrt{97}}{2}})}{a^4}$$

由 $h'(a)>0$ 解得：$a>\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{97}}{2}}$，由 $h'(a)<0$ 解得：$0<a<\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{97}}{2}}$，

$\therefore h(a)$ 在区间 $(0,\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{97}}{2}})$ 单调递减，在 $(\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{97}}{2}},+\infty)$ 单调递增，………… 11 分

$\therefore$当 $a^2=\dfrac{5+\sqrt{97}}{2}$ 时，$h(a)$取得最小值．故 M 的横坐标为 $\dfrac{5+\sqrt{97}}{2}$． ………….. 12 分

（2）**方法二：**延长 PN 交 x 轴于点 Q，

设 $P(x_3，y_3)$，$Q(x_4，0)$，$y_1=a$，则 $M(a^2，a)$，

联立直线 MN 与抛物线 C 方程可得：$\begin{cases} x=ty+2 \\ y^2=x \end{cases}$，

整理得：$y^2-ty-2=0$，

由韦达定理：$y_1 y_2=-2$，则 $y_2=\dfrac{-2}{a}$，故 $N(\dfrac{4}{a^2},-\dfrac{2}{a})$， ………………………………7 分

联立直线 MP 与抛物线 C 方程可得：$\begin{cases} x=ny+3 \\ y^2=x \end{cases}$，整理得：$y^2-ny-3=0$，

由韦达定理：$y_1y_3=-3$，则 $y_3=\dfrac{-3}{a}$，故 $P(\dfrac{9}{a^2},-\dfrac{3}{a})$，……………………………9 分

∵Q，N，P 三点共线，

故 $k_{QN}=k_{NP}$，代入得：$\dfrac{\frac{2}{a}}{x_4-\frac{4}{a^2}}=\dfrac{\frac{1}{a}}{-\frac{5}{a^2}}$，解得：$x_4=-\dfrac{6}{a^2}$，

∴ $\overrightarrow{QN}=(\dfrac{10}{a^2},-\dfrac{2}{a})$，$\overrightarrow{QP}=(\dfrac{15}{a^2},-\dfrac{3}{a})$，即 $\overrightarrow{QN}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{QP}$，故 $\overrightarrow{NP}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{QP}$，

则 $S_{\Delta MNP}=\dfrac{1}{3}S_{\Delta MQP}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}|QB|\cdot|y_1-y_3|=\dfrac{1}{6}(3+\dfrac{6}{a^2})(a+\dfrac{3}{a})=\dfrac{1}{2}(\dfrac{6}{a^3}+\dfrac{5}{a}+a)$，………10 分

令 $h(a)=\dfrac{6}{a^3}+\dfrac{5}{a}+a$，则 $h'(a)=\dfrac{a^4-5a^2-18}{a^4}$，

当 $a^2=\dfrac{5+\sqrt{97}}{2}$ 时，$h(a)$取得最小值，……………………………………………… 11 分

故 M 的横坐标为 $\dfrac{5+\sqrt{97}}{2}$．…………………………………………………………12 分

22．**解**：（1）可得圆 C 的标准方程为：$(x-2)^2+y^2=4$，

∴ 圆 C 是以 C（2，0）为圆心，2 为半径的圆，………………………………2 分

∴ 圆 C 的参数方程为：$\begin{cases} x=2+2\cos\alpha \\ y=2\sin\alpha \end{cases}$（$\alpha$ 为参数）．…………………………5 分

（2）∵ $|AB|=2\sqrt{2}$，可得 $\angle ACB=\dfrac{\pi}{2}$，………………………………………………6 分

不妨设点 A 所对应的参数为 α，则点 B 所对应的参数为 $\alpha+\dfrac{\pi}{2}$，

∴ $A(2+2\cos\alpha，2\sin\alpha)$，则 $B(2+2\cos(\alpha+\dfrac{\pi}{2})，2\sin(\alpha+\dfrac{\pi}{2}))$，

即 $B\left(2-2\sin\alpha，2\cos\alpha\right)$，……………………………………………………………7 分

∴ $\begin{cases} x_1=2+2\cos\alpha \\ y_1=2\sin\alpha \end{cases}$，$\begin{cases} x_2=2-2\sin\alpha \\ y_2=2\cos\alpha \end{cases}$，

∴ $x_1x_2+y_1y_2=(2+2\cos\alpha)\cdot(2-2\sin\alpha)+2\sin\alpha\cdot 2\cos\alpha$ ……………………8 分

$=4+4(\cos\alpha-\sin\alpha)=4+4\sqrt{2}\cos(\alpha+\frac{\pi}{4})$，……………………………9 分

∵ $\alpha\in[0,2\pi]$，则 $\alpha+\frac{\pi}{4}\in[\frac{\pi}{4},\frac{9\pi}{4}]$，

∴ 当 $\cos(\alpha+\frac{\pi}{4})=1$，即 $\alpha=\frac{7\pi}{4}$ 时，$x_1y_1+x_2y_2$ 的最大值为 $4+4\sqrt{2}$．…………10 分

23．**解**：（1）由 $a=1$，则 $2b+3c=3$，

由柯西不等式，得 $(2b+3c)[(\frac{1}{\sqrt{2}})^2+(\frac{1}{\sqrt{3}})^2]\geqslant(\sqrt{b}+\sqrt{c})^2$，………………………… 2 分

∴ $(\sqrt{b}+\sqrt{c})^2\leqslant3\times(\frac{1}{2}+\frac{1}{3})=\frac{5}{2}$，…………………………………………………… 3 分

∴ $\sqrt{b}+\sqrt{c}\leqslant\frac{\sqrt{10}}{2}$，当且仅当 $b=\frac{9}{10}$，$c=\frac{2}{5}$ 时等号成立．……………………………5 分

（2）∵ $a+2b+3c=4$，即 $2b+3c=4-a$，

又 $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=2$，则 $\sqrt{b}+\sqrt{c}=2-\sqrt{a}$，……………………………………6 分

又由（1）可知：$(2b+3c)\left[(\frac{1}{\sqrt{2}})^2+(\frac{1}{\sqrt{3}})^2\right]\geqslant(\sqrt{b}+\sqrt{c})^2$，………………………… 7 分

∴ $(4-a)\frac{5}{6}\geqslant(2-\sqrt{a})^2$，即 $11a-24\sqrt{a}+4\leqslant0$，………………………………………8 分

令 $\sqrt{a}=t$，所以 $11t^2-24t+4\leqslant0$，

解得：$\frac{2}{11}\leqslant t\leqslant2$，即 $\frac{4}{121}\leqslant a\leqslant4$，……………………………………………………9 分

又 $2b+3c=4-a$，且 $b>0$，$c>0$，

∴ $4-a>0$，即 $a<4$，

综上可得，$\frac{4}{121}\leqslant a<4$．…………………………………………………………………… 10 分