成都市2020级高中毕业班第三次诊断性检测

数学(理科)参考答案及评分意见

第Ⅰ卷　(选择题,共60分)

一、选择题:(每小题5分,共60分)

1.C;　2.B;　3.A;　4.C;　5.A;　6.B;　7.D;　8.C;　9.D;　10.D;　11.A;　12.B.

第Ⅱ卷　(非选择题,共90分)

二、填空题:(每小题5分,共20分)

13. $\frac{1}{2}$;　　14. 81;　　15. 10;　　16. $\frac{3\sqrt{3}}{16}$.

三、解答题:(共70分)

17. **解:**(Ⅰ)由题得 $\bar{x}=\frac{1}{5}(9+9.5+10+10.5+11)=10$, ……1分

$\bar{y}=\frac{1}{5}(11+10+8+6+5)=8$. ……2分

$\because \sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})=-8$, $\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2=2.5$, $\sum\limits_{i=1}^{5}(y_i-\bar{y})^2=26$, ……5分

$$\therefore r=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}=\frac{-8}{\sqrt{65}}\approx-0.99.$$

$\because y$ 与 x 的相关系数近似为 -0.99,说明 y 与 x 的线性相关性很强,从而可以用线性回归模型拟合 y 与 x 的关系. ……6分

(Ⅱ)$\because \hat{b}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2}=\frac{-8}{2.5}=-3.2$, $\hat{a}=\bar{y}+3.2\bar{x}=40$, ……9分

$\therefore y$ 关于 x 的线性回归方程为 $\hat{y}=-3.2x+40$. ……10分

当 $x=8.5$ 时,$\hat{y}=12.8$.

$\therefore$ 当产品定价为8.5元时,预测销量可达到12.8万件. ……12分

18. **解:**(Ⅰ)如图,设 P 是 CG 的中点,连接 PM,PN.

$\because M$ 为 AC 的中点,$\therefore PM /\!/ AG$.

又 $PM\not\subset$ 平面 AGF,$AG\subset$ 平面 AGF,

$\therefore PM /\!/$ 平面 AGF. ……2分

同理可得,$PN /\!/$ 平面 AGF.

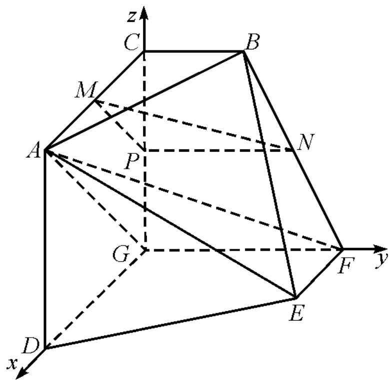
$\because PM\cap PN=P$,$PM,PN\subset$ 平面 PMN,

$\therefore$ 平面 $PMN /\!/$ 平面 AGF. ……5分

又 $MN\subset$平面 PMN，$\therefore MN/\!/$平面 AGF. ……6 分

(Ⅱ)$\because FG\perp$平面 $ADGC$，$CG,DG\subset$平面 $ADGC$，

$\therefore FG\perp CG, FG\perp DG$.



以 G 为坐标原点，$\overrightarrow{GD},\overrightarrow{GF},\overrightarrow{GC}$的方向分别为 x 轴，y 轴，z 轴正方向，建立如图所示的空间直角坐标系 $Gxyz$. 不妨设 $BC=1$，则 $G(0,0,0)$，$M(1,0,2)$，$N(0,\frac{3}{2},1)$，$B(0,1,2)$，$E(1,2,0)$，$F(0,2,0)$，

$\overrightarrow{MN}=(-1,\frac{3}{2},-1)$，$\overrightarrow{BE}=(1,1,-2)$，$\overrightarrow{BF}=(0,1,-2)$. ……8 分

设平面 BEF 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$.

由$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BE}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BF}=0\end{cases}$ 得$\begin{cases}x+y-2z=0,\\ y-2z=0.\end{cases}$

令 $z=1$，得 $\boldsymbol{n}=(0,2,1)$. ……10 分

设 MN 与平面 BEF 所成角为 θ，

则 $\sin\theta=|\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{MN}\rangle|=\dfrac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{MN}|}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{MN}|}=\dfrac{2}{\frac{\sqrt{17}}{2}\times\sqrt{5}}=\dfrac{4\sqrt{85}}{85}$.

$\therefore$直线 MN 与平面 BEF 所成角的正弦值为$\dfrac{4\sqrt{85}}{85}$. ……12 分

19. **解**：(Ⅰ)$\because\sqrt{3}c+a=b\cos C-c\cos B$，

由正弦定理有$\sqrt{3}\sin C+\sin A=\sin B\cos C-\sin C\cos B$， ……2 分

$\because\sin A=\sin(B+C)$，

$\therefore\sqrt{3}\sin C+\sin B\cos C+\sin C\cos B=\sin B\cos C-\sin C\cos B$. ……4 分

$\therefore 2\sin C\cos B+\sqrt{3}\sin C=0$. ……5 分

又 $C\in(0,\pi)$，$\therefore\sin C\neq 0$.

$\therefore\cos B=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

又 $B\in(0,\pi)$，$\therefore B=\dfrac{5\pi}{6}$. ……6 分

(Ⅱ)在$\triangle BCD$ 中，由余弦定理得 $\cos\angle BDC=\dfrac{BD^2+CD^2-BC^2}{2BD\cdot CD}=\dfrac{2b^2-9a^2}{2b^2}$.

在$\triangle ABD$ 中，由余弦定理得 $\cos\angle BDA=\dfrac{BD^2+AD^2-AB^2}{2AD\cdot BD}=\dfrac{5b^2-9c^2}{4b^2}$.

$\because\angle BDC+\angle BDA=180^\circ$，$\therefore\cos\angle BDC=-\cos\angle BDA$.

即$\dfrac{2b^2-9a^2}{2b^2}=-\dfrac{5b^2-9c^2}{4b^2}$，整理得 $b^2-c^2=2a^2$. ……9 分

在$\triangle ABC$ 中，由余弦定理得 $\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

则$-\dfrac{a^2}{2ac}=-\dfrac{a}{2c}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. ∴$a=\sqrt{3}c$.

∴$b^2-c^2=6c^2$，即$b=\sqrt{7}c$. ……11 分

∴$\cos\angle BDA=\dfrac{5b^2-9c^2}{4b^2}=\dfrac{13}{14}$. ……12 分

20. **解**：（Ⅰ）设$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，其中$x_1\neq x_2$.

由$\begin{cases}y_1^2=4x_1\\y_2^2=4x_2\end{cases}$，得$y_1^2-y_2^2=4x_1-4x_2$. 化简得$\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\dfrac{4}{y_1+y_2}$. ……2 分

∴$\sqrt{3}=\dfrac{4}{y_1+y_2}$，即$\dfrac{y_1+y_2}{2}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

∴线段PQ中点纵坐标的值为$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. ……4 分

（Ⅱ）设$P(\dfrac{y_1^2}{4},y_1)$，$Q(\dfrac{y_2^2}{4},y_2)$，$M(\dfrac{y_3^2}{4},y_3)$，$N(\dfrac{y_4^2}{4},y_4)$.

∴$k_{PM}=\dfrac{y_1-y_3}{\dfrac{y_1^2}{4}-\dfrac{y_3^2}{4}}=\dfrac{4}{y_1+y_3}$. ……6 分

∴直线PM的方程为$y-y_1=\dfrac{4}{y_1+y_3}(x-\dfrac{y_1^2}{4})$，化简可得$(y_1+y_3)y-4x-y_1y_3=0$.

∵$T(\sqrt{3},0)$在直线PM上，解得$y_1y_3=-4\sqrt{3}$. ……8 分

同理，可得$y_2y_4=-4\sqrt{3}$.

∴$k_{PQ}=\dfrac{4}{y_1+y_2}=\dfrac{4}{\dfrac{-4\sqrt{3}}{y_3}+\dfrac{-4\sqrt{3}}{y_4}}=\dfrac{y_3y_4}{-\sqrt{3}(y_3+y_4)}=\sqrt{3}$. ……10 分

∴$y_3y_4=-3(y_3+y_4)$.

又直线MN的方程为$(y_3+y_4)y-4x-y_3y_4=0$，即$(y_3+y_4)(y+3)-4x=0$.

∴直线MN恒过定点$(0,-3)$. ……12 分

21. **解**：（Ⅰ）当$a=1$时，函数$f(x)=x^4-x^3\sin x$.

∴$f'(x)=4x^3-(3x^2\sin x+x^3\cos x)$. ∴$f'(\pi)=5\pi^3$. ……3 分

∴曲线$y=f(x)$在点(π,π^4)处的切线方程为$5\pi^3x-y-4\pi^4=0$. ……4 分

（Ⅱ）由题知$f(x)=x^3(x-a\sin x)$，不妨设$g(x)=x-a\sin x$.

∴$g'(x)=1-a\cos x$. ……5 分

(i)当$a\leqslant 1$时，不妨设$x\in(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$.

∵$\cos x\in(0,1)$，∴$g'(x)>0$在$(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$上恒成立.

∴$g(x)$在$(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$上单调递增. ……6 分

又$g(0)=0$，

$\therefore$ 当 $x\in(-\frac{\pi}{2},0)$ 时，$g(x)<g(0)=0$；当 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时，$g(x)>g(0)=0$. ……7 分

$\because f(x)=x^3g(x)$，

$\therefore f'(x)=3x^2g(x)+x^3g'(x)$.

$\therefore$ 当 $x\in(-\frac{\pi}{2},0)$ 时，$f'(x)<0$，即 $f(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{2},0)$ 上单调递减；

当 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时，$f'(x)>0$，即 $f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上单调递增.

$\therefore x=0$ 是函数 $f(x)$ 的极小值点. ……9 分

(ii) 当 $a>1$ 时，不妨设 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$.

$\therefore \exists x_0\in(0,\frac{\pi}{2})$，使得 $g'(x_0)=0$，且 $x\in(0,x_0)$，$g'(x)<0$.

$\therefore g(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减. ……10 分

$\therefore$ 当 $x\in(0,x_0)$ 时，$g(x)<g(0)=0$.

$\therefore$ 当 $x\in(0,x_0)$ 时，$f'(x)=3x^2g(x)+x^3g'(x)<0$.

$\therefore f(x)$ 在 $x\in(0,x_0)$ 上单调递减. ……11 分

$\therefore x=0$ 不是函数 $f(x)$ 的极小值点.

综上所述，当 $x=0$ 是函数 $f(x)$ 的极小值点时，a 的取值范围为 $(-\infty,1]$. ……12 分

22. **解**：(Ⅰ) 由直线 l 的参数方程，得直线 l 的普通方程为 $2x+3y-8=0$. ……2 分

将 $\rho^2=x^2+y^2$，$\rho\sin\theta=y$ 代入曲线 C 的极坐标方程

化简得曲线 C 的直角坐标方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$. ……5 分

(Ⅱ) 由 (Ⅰ)，设点 $P(2\cos\alpha,\sin\alpha)$. ……6 分

由题知 $|PQ|$ 的最小值为点 P 到直线 l 的距离的最小值.

又点 P 到直线 l 的距离 $d=\frac{|4\cos\alpha+3\sin\alpha-8|}{\sqrt{2^2+3^2}}=\frac{|5\sin(\alpha+\varphi)-8|}{\sqrt{13}}$，其中 $\tan\varphi=\frac{4}{3}$.

……8 分

当 $\alpha+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 时，d 的最小值为 $\frac{3\sqrt{13}}{13}$.

$\therefore |PQ|$ 的最小值为 $\frac{3\sqrt{13}}{13}$. ……10 分

23. **解**：(Ⅰ) $\because f(1)=3$，$f(n)=3$，且 $n>1$，

$\therefore 3+|1-m|=3$，解得 $m=1$.

$\therefore f(x)=3|x-2|+|x-1|$. ……2 分

$\therefore 3|n-2|+|n-1|=3$.

(i) 当 $1<n\leqslant 2$ 时，由 $3(2-n)+(n-1)=5-2n=3$，解得 $n=1$（不合题意，舍去）；

(ii) 当 $n>2$ 时，由 $3(n-2)+(n-1)=4n-7=3$，解得 $n=\frac{5}{2}$，经检验满足题意.

综上所述，$m=1$，$n=\frac{5}{2}$. ……5 分

(Ⅱ)由(Ⅰ)得 $m=1$. $\therefore a^2+b^2+c^2=1$.

$\because \left(\frac{a^4}{b^2+1}+\frac{b^4}{c^2+1}+\frac{c^4}{a^2+1}\right)(a^2+1+b^2+1+c^2+1)\geqslant(a^2+b^2+c^2)^2$， ……8 分

$\therefore \frac{a^4}{b^2+1}+\frac{b^4}{c^2+1}+\frac{c^4}{a^2+1}\geqslant\frac{1}{1+3}=\frac{1}{4}$. 当且仅当 $\frac{a^4}{(b^2+1)^2}=\frac{b^4}{(c^2+1)^2}=\frac{c^4}{(a^2+1)^2}$，即 $a=b=c=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时等号成立.

$\therefore \frac{a^4}{b^2+1}+\frac{b^4}{c^2+1}+\frac{c^4}{a^2+1}\geqslant\frac{1}{4}$. ……10 分