成都市2020级高中毕业班第三次诊断性检测

数学(文科)参考答案及评分意见

第Ⅰ卷　(选择题,共60分)

一、选择题:(每小题5分,共60分)

1.C;　2.B;　3.A;　4.C;　5.A;　6.A;　7.B;　8.D;　9.C;　10.D;　11.B;　12.D.

第Ⅱ卷　(非选择题,共90分)

二、填空题:(每小题5分,共20分)

13. $\frac{1}{2}$;　　14. 81;　　15. 10;　　16. $\frac{3\sqrt{3}}{16}$.

三、解答题:(共70分)

17. **解:**(Ⅰ)由题得 $\bar{x}=\frac{1}{5}(9+9.5+10+10.5+11)=10$,　　……1分

$\bar{y}=\frac{1}{5}(11+10+8+6+5)=8$.　　……2分

$\because \sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})=-8$,$\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2=2.5$,$\sum_{i=1}^{5}(y_i-\bar{y})^2=26$,　　……5分

$$\therefore r=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}=\frac{-8}{\sqrt{65}}\approx-0.99.$$

$\because y$ 与 x 的相关系数近似为 -0.99,说明 y 与 x 的线性相关性很强,从而可以用线性回归模型拟合 y 与 x 的关系.　　……6分

(Ⅱ)$\because \hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2}=\frac{-8}{2.5}=-3.2$,$\hat{a}=\bar{y}+3.2\bar{x}=40$,　　……9分

$\therefore y$ 关于 x 的线性回归方程为 $\hat{y}=-3.2x+40$.　　……10分

当 $x=8.5$ 时,$\hat{y}=12.8$.

$\therefore$ 当产品定价为8.5元时,预测销量可达到12.8万件.　　……12分

18. **解:**(Ⅰ)如图,设 P 是 CG 的中点,连接 PM,PN.

$\because M$ 为 AC 的中点,$\therefore PM /\!/ AG$.

又 $PM\not\subset$ 平面 AGF,$AG\subset$ 平面 AGF,

$\therefore PM /\!/$ 平面 AGF.　　……2分

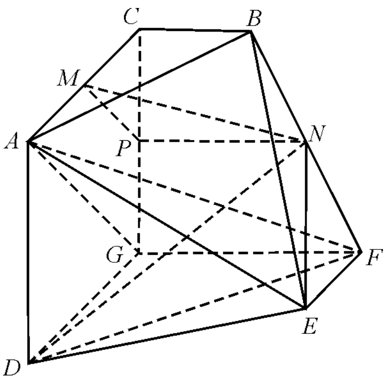
同理可得,$PN /\!/$ 平面 AGF.

$\because PM\cap PN=P$,$PM,PN\subset$ 平面 PMN,

$\therefore$ 平面 $PMN /\!/$ 平面 AGF.　　……5分

又 $MN\subset$ 平面 PMN，$\therefore MN\parallel$ 平面 AGF.

……6 分



（Ⅱ）$\because FG\perp$ 平面 $ADGC$，$CG\subset$ 平面 $ADGC$，

$\therefore FG\perp CG$. ……7 分

又 $CG\perp GD$，$GF\cap GD=G$，$GD\subset$ 平面 $DEFG$，$GF\subset$ 平面 $DEFG$，

$\therefore CG\perp$ 平面 $DEFG$. ……9 分

$\because BC=1$，$\therefore FG=2$，$EF=1$，$CG=2$.

$\therefore V_{E-DFN}=V_{N-DEF}=V_{P-DEF}=\dfrac{1}{3}S_{DEF}\cdot\dfrac{1}{2}CG=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\cdot EF\cdot FG\cdot\dfrac{1}{2}\cdot CG=\dfrac{1}{3}$.

$\therefore$ 三棱锥 $E-DFN$ 的体积为 $\dfrac{1}{3}$. ……12 分

19. **解**：（Ⅰ）$\because \sqrt{3}c+a=b\cos C-c\cos B$，

由正弦定理有 $\sqrt{3}\sin C+\sin A=\sin B\cos C-\sin C\cos B$， ……2 分

$\because \sin A=\sin(B+C)$，

$\therefore \sqrt{3}\sin C+\sin B\cos C+\sin C\cos B=\sin B\cos C-\sin C\cos B$. ……4 分

$\therefore 2\sin C\cos B+\sqrt{3}\sin C=0$. ……5 分

又 $C\in(0,\pi)$，$\therefore \sin C\neq 0$.

$\therefore \cos B=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

又 $B\in(0,\pi)$，$\therefore B=\dfrac{5\pi}{6}$. ……6 分

（Ⅱ）在 $\triangle BCD$ 中，由余弦定理得 $\cos\angle BDC=\dfrac{BD^2+CD^2-BC^2}{2BD\cdot CD}=\dfrac{2b^2-9a^2}{2b^2}$.

在 $\triangle ABD$ 中，由余弦定理得 $\cos\angle BDA=\dfrac{BD^2+AD^2-AB^2}{2AD\cdot BD}=\dfrac{5b^2-9c^2}{4b^2}$.

$\because \angle BDC+\angle BDA=180^\circ$，$\therefore \cos\angle BDC=-\cos\angle BDA$.

即 $\dfrac{2b^2-9a^2}{2b^2}=-\dfrac{5b^2-9c^2}{4b^2}$，整理得 $b^2-c^2=2a^2$. ……9 分

在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理得 $\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

则 $-\dfrac{a^2}{2ac}=-\dfrac{a}{2c}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. $\therefore a=\sqrt{3}c$.

$\therefore b^2-c^2=6c^2$，即 $b=\sqrt{7}c$. ……11 分

$\therefore \cos\angle BDA=\dfrac{5b^2-9c^2}{4b^2}=\dfrac{13}{14}$. ……12 分

20. **解**：（Ⅰ）设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，其中 $x_1\neq x_2$.

由 $\begin{cases}y_1^2=4x_1\\ y_2^2=4x_2\end{cases}$，得 $y_1^2-y_2^2=4x_1-4x_2$. 化简得 $\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\dfrac{4}{y_1+y_2}$. ……2 分

$\therefore\sqrt{3}=\dfrac{4}{y_1+y_2}$，即$\dfrac{y_1+y_2}{2}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

$\therefore$线段 PQ 中点纵坐标的值为$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. ……4 分

（Ⅱ）设 y 轴上存在定点 $S(0,s)$，由题意，直线 MN 斜率存在且不为 0，设直线 $MN:y=kx+s$，$P(\dfrac{y_1^2}{4},y_1)$，$Q(\dfrac{y_2^2}{4},y_2)$，$M(\dfrac{y_3^2}{4},y_3)$，$N(\dfrac{y_4^2}{4},y_4)$.

由$\begin{cases}y=kx+s,\\y^2=4x\end{cases}$消去 x，得 $ky^2-4y+4s=0$.

$\because\Delta=16-16ks>0$，$\therefore ks<1$.

$\therefore y_3+y_4=\dfrac{4}{k}$，$y_3y_4=\dfrac{4s}{k}$. ……6 分

$\because P,T,M$ 三点共线，

$\therefore\dfrac{y_3-0}{\dfrac{y_3^2}{4}-\sqrt{3}}=\dfrac{y_1-0}{\dfrac{y_1^2}{4}-\sqrt{3}}$. 解得 $y_1y_3=-4\sqrt{3}$.

同理，可得 $y_2y_4=-4\sqrt{3}$. ……8 分

又 $k_{PQ}=\dfrac{y_1-y_2}{\dfrac{y_1^2}{4}-\dfrac{y_2^2}{4}}=\dfrac{4}{y_1+y_2}=\dfrac{4}{\dfrac{-4\sqrt{3}}{y_3}+\dfrac{-4\sqrt{3}}{y_4}}=\dfrac{y_3y_4}{-\sqrt{3}(y_3+y_4)}=\sqrt{3}$， ……10 分

$\therefore\dfrac{y_3y_4}{y_3+y_4}=\dfrac{\dfrac{4s}{k}}{\dfrac{4}{k}}=-3$. 解得 $s=-3$. ……11 分

$\therefore$直线 MN 恒过定点 $(0,-3)$. ……12 分

21. **解**：（Ⅰ）当 $a=0$ 时，$f(x)=-x\sin x$.

$\therefore f'(x)=-(\sin x+x\cos x)$. $\therefore f'(\pi)=\pi$. ……3 分

$\therefore$曲线 $y=f(x)$ 在点 $(\pi,0)$ 处的切线方程为 $\pi x-y-\pi^2=0$. ……4 分

（Ⅱ）由题知 $f(x)=x(ax-\sin x)$，不妨设 $g(x)=ax-\sin x$.

$\therefore g'(x)=a-\cos x$. ……5 分

(i)当 $a\geqslant1$ 时，不妨设 $x\in(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$.

$\because\cos x\in(0,1)$，$\therefore g'(x)>0$ 在 $(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$ 上恒成立.

$\therefore g(x)$ 在 $(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$ 上单调递增. ……6 分

又 $g(0)=0$，

$\therefore$当 $x\in(-\dfrac{\pi}{2},0)$ 时，$g(x)<g(0)=0$；当 $x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$ 时，$g(x)>g(0)=0$. ……7 分

$\because f(x)=xg(x)$，

$\therefore f'(x)=g(x)+xg'(x)$.

$\therefore$当 $x\in(-\frac{\pi}{2},0)$时,$f'(x)<0$,即 $f(x)$在$(-\frac{\pi}{2},0)$上单调递减;

当 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$时,$f'(x)>0$,即 $f(x)$在$(0,\frac{\pi}{2})$上单调递增.

$\therefore x=0$ 是函数 $f(x)$的极小值点. ……9 分

(ii)当 $0\leqslant a<1$ 时,不妨设 $x\in(0,\frac{\pi}{2}]$.

$\therefore \exists x_0\in(0,\frac{\pi}{2}]$,使得 $g'(x_0)=0$,且 $x\in(0,x_0)$,$g'(x)<0$.

$\therefore g(x)$在$(0,x_0)$上单调递减. ……10 分

$\therefore$当 $x\in(0,x_0)$时,$g(x)<g(0)=0$.

$\therefore$当 $x\in(0,x_0)$时,$f'(x)=g(x)+xg'(x)<0$.

$\therefore f(x)$在 $x\in(0,x_0)$上单调递减. ……11 分

$\therefore x=0$ 不是函数 $f(x)$的极小值点.

综上所述,当 $x=0$ 是函数 $f(x)$的极小值点时,a 的取值范围为$[1,+\infty)$. ……12 分

22. **解**:(Ⅰ)由直线 l 的参数方程,得直线 l 的普通方程为 $2x+3y-8=0$. ……2 分

将 $\rho^2=x^2+y^2$,$\rho\sin\theta=y$ 代入曲线 C 的极坐标方程

化简得曲线 C 的直角坐标方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$. ……5 分

(Ⅱ)由(Ⅰ),设点 $P(2\cos\alpha,\sin\alpha)$. ……6 分

由题知$|PQ|$的最小值为点 P 到直线 l 的距离的最小值.

又点 P 到直线 l 的距离 $d=\frac{|4\cos\alpha+3\sin\alpha-8|}{\sqrt{2^2+3^2}}=\frac{|5\sin(\alpha+\varphi)-8|}{\sqrt{13}}$,其中 $\tan\varphi=\frac{4}{3}$.

……8 分

当 $\alpha+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$时,$d$ 的最小值为$\frac{3\sqrt{13}}{13}$.

$\therefore|PQ|$的最小值为$\frac{3\sqrt{13}}{13}$. ……10 分

23. **解**:(Ⅰ)$\because f(1)=3$,$f(n)=3$,且 $n>1$,

$\therefore 3+|1-m|=3$,解得 $m=1$.

$\therefore f(x)=3|x-2|+|x-1|$. ……2 分

$\therefore 3|n-2|+|n-1|=3$.

(i)当 $1<n\leqslant 2$ 时,由 $3(2-n)+(n-1)=5-2n=3$,解得 $n=1$(不合题意,舍去);

(ii)当 $n>2$ 时,由 $3(n-2)+(n-1)=4n-7=3$,解得 $n=\frac{5}{2}$,经检验满足题意.

综上所述,$m=1$,$n=\frac{5}{2}$. ……5 分

(Ⅱ)由(Ⅰ)得 $m=1$. $\therefore a^2+b^2+c^2=1$.

$\because(\frac{a^4}{b^2+1}+\frac{b^4}{c^2+1}+\frac{c^4}{a^2+1})(a^2+1+b^2+1+c^2+1)\geqslant(a^2+b^2+c^2)^2$, ……8 分

$\therefore \frac{a^4}{b^2+1}+\frac{b^4}{c^2+1}+\frac{c^4}{a^2+1} \geqslant \frac{1}{1+3}=\frac{1}{4}$. 当且仅当$\frac{a^4}{(b^2+1)^2}=\frac{b^4}{(c^2+1)^2}=\frac{c^4}{(a^2+1)^2}$，即$a=b=c=\frac{\sqrt{3}}{3}$时等号成立.

$\therefore \frac{a^4}{b^2+1}+\frac{b^4}{c^2+1}+\frac{c^4}{a^2+1} \geqslant \frac{1}{4}$. ……10 分