

绵阳市高中 2021 级第二次诊断性考试

文科数学

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将答题卡交回。

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 若 $iz = 1 + i$ ，则复数 $z =$
A. $1 + i$ B. $1 - i$ C. $-1 + i$ D. $-1 - i$
2. 已知 $A = \{x | x^2 - x < 0\}$ ， $B = \{x | x < 2\}$ ，则 $A \cap B =$
A. $(0, 1)$ B. $(0, 2)$
C. $(1, 2)$ D. $(-\infty, 2)$
3. 已知 $a = (1, 0)$ ， $|b| = 1$ ， $|a - b| = \sqrt{3}$ ，则 a 与 b 的夹角为
A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{2\pi}{3}$ D. $\frac{5\pi}{6}$
4. 若变量 x, y 满足不等式组 $\begin{cases} x \geq 0, \\ 2x + y - 2 \leq 0, \end{cases}$ 则 $x + y$ 的最大值是
A. -1 B. 0 C. 1 D. 2
5. 已知变量 x, y 之间的线性回归方程为 $\hat{y} = 2x + 1$ ，且变量 x, y 之间的一组相关数据如表所示，

x	2	4	6	8
y	5	8.2	13	m

则下列说法正确的是

- A. $m = 17$
- B. 变量 y 与 x 是负相关关系
- C. 该回归直线必过点 $(5, 11)$
- D. x 增加 1 个单位， y 一定增加 2 个单位

6. 已知 $f(x)$ 为 \mathbf{R} 上的减函数, 则

A. $f(0.2^{-0.3}) > f(\log_3 2) > f(0.5)$

B. $f(0.5) > f(\log_3 2) > f(0.2^{-0.3})$

C. $f(\log_3 2) > f(0.5) > f(0.2^{-0.3})$

D. $f(0.2^{-0.3}) > f(0.5) > f(\log_3 2)$

7. 已知 $x > 0, y > 0$, 则 “ $x + y \leq 1$ ” 是 “ $x^2 + y^2 \leq 1$ ” 的

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

8. 已知角 α 的终边与角 β 的终边关于 $y=x$ 对称 (β 为象限角), 则 $\frac{\cos(\alpha - \beta)}{\sin 2\beta} =$

A. -1

B. 0

C. 1

D. 2

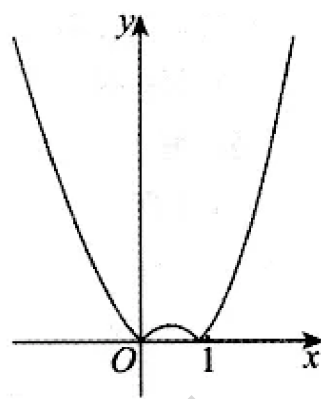
9. 如右图是 $y = f(x)$ 的大致图象, 则 $f(x)$ 的解析式可能为

A. $f(x) = |x^2 - \sin x|$

B. $f(x) = |x - \sin x|$

C. $f(x) = |2^x - 1|$

D. $f(x) = |x^2 - x - \frac{1}{4}|$



10. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $S_n = \frac{3^n - 2}{3^n}$, 则下列说法正确的是

A. $a_n < a_{n+1}$

B. $S_n > S_{n+1}$

C. $a_n + 2S_n = 1$

D. $0 < a_n \leq \frac{4}{9}$

11. 已知曲线 $y = x^2 - 2mx + m - 1$ 与 x 轴交于不同的两点 A, B , 与 y 轴交于点 C , 则过 A, B, C 三点的圆的圆心轨迹为

A. 直线

B. 圆

C. 椭圆

D. 双曲线

12. 设 F_1, F_2 分别为椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左, 右焦点, 以 F_1 为圆心且过 F_2 的

圆与 x 轴交于另一点 P , 与 y 轴交于点 Q , 线段 QF_2 与 C 交于点 A . 已知 $\triangle APF_2$ 与 $\triangle QF_1F_2$ 的面积之比为 3:2, 则该椭圆的离心率为

A. $\frac{2}{3}$

B. $\sqrt{13} - 3$

C. $\sqrt{3} - 1$

D. $\frac{\sqrt{3} + 1}{4}$

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知 α 为锐角， $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ ，则 $\sin(\alpha + \frac{\pi}{4}) =$ _____.

14. 若 $f(x) = \ln(1 + \frac{1}{x+b})$ 为奇函数，则 $b =$ _____.

15. 甲、乙二人用 4 张不同的扑克牌（其中红桃 3 张，方片 1 张）玩游戏，他们将扑克牌洗匀后，背面朝上放在桌面上，甲先抽，乙后抽，抽出的牌不放回，各抽一张。则甲、乙二人抽到的花色相同的概率为 _____.

16. 已知 $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$ 分别是双曲线 $E: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点，过 F_2 作 E 的渐近线的垂线，垂足为 P 。点 M 在 E 的左支上，当 $PM \parallel x$ 轴时， $|PM| = c$ ，则 E 的渐近线方程为 _____.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

(一) 必考题：共 60 分。

17. (12 分)

已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且 $S_5 = 45$ ， $S_6 = 60$ 。

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 求数列 $\{\frac{1}{a_n a_{n+1}}\}$ 的前 n 项和 T_n 。

18. (12 分)

绵阳市 37 家 A 级旅游景区，在 2023 年国庆中秋双节期间，接待人数和门票收入大幅增长。绵阳某旅行社随机调查了市区 100 位市民平时外出旅游情况，得到的数据如下表：

(1) 能否有 95% 的把握认为喜欢旅游与性别有关？

(2) 在以上所调查的喜欢旅游的市民中，按性别进行分层抽样随机抽取 5 人，再从这 5 人中随机抽取 2 人进行访谈，求这两人是不同性别的概率。

	喜欢旅游	不喜欢旅游	总计
男性	20	30	50
女性	30	20	50
总计	50	50	100

附： $K^2 = \frac{n(ad - bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$

$P(K^2 \geq k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

19. (12分)

在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $4\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 3bc \sin A = 24c$.

(1) 求 $\tan B$ 及 a ;

(2) 若 $\triangle ABC$ 周长为48, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

20. (12分)

已知直线 $l: y = kx - 2$ 与抛物线 $E: x^2 = 2py (p > 0)$ 交于 A, B 两点, F 为 E 的焦点, 直线 FA, FB 的斜率之和为0.

(1) 求 E 的方程;

(2) 直线 FA, FB 分别交直线 $y = -2$ 于 M, N 两点, 若 $|MN| \geq 16$, 求 k 的取值范围.

21. (12分)

已知函数 $f(x) = 2\sin x - ax^2 + 3x$.

(1) 求曲线 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的切线方程;

(2) 若 $f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{2}, \pi]$ 上是单调函数, 求实数 a 的取值范围.

(二) 选考题: 共10分. 请考生在第22、23题中任选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一题记分.

22. [选修4—4: 坐标系与参数方程] (10分)

在平面直角坐标系 xOy 中, 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = 3\sqrt{1-t^2} \\ y = 2t \end{cases}$ (t 为参数), 以坐标原

点 O 为极点, 以 x 轴正半轴为极轴, 建立极坐标系.

(1) 求曲线 C 极坐标方程;

(2) 若 A, B 为曲线 C 上的动点, 且 $OA \perp OB$, 求 $\frac{1}{|OA|^2} + \frac{1}{|OB|^2}$ 的值.

23. [选修4—5: 不等式选讲] (10分)

(1) 已知 a, b, x, y 均为正数, 求证: $\frac{(x+y)^2}{ax^2+by^2} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$, 并指出等号成立的条件;

(2) 利用(1)的结论, 求函数 $f(x) = \frac{4x^2+4x+1}{5x^2+4x+2}$ ($x > 0$) 的最大值, 并指出取最大值

时 x 的值.