

# 绵阳市高中 2021 级第二次诊断性考试

## 文科数学参考答案及评分意见

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。

BACDC BACAD AB

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13.  $\frac{7\sqrt{2}}{10}$       14.  $-\frac{1}{2}$       15.  $\frac{1}{2}$       16.  $\sqrt{2}x \pm y = 0$

三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分。

17. 解：(1) 设数列  $\{a_n\}$  的公差是  $d$ ，

$$\text{则 } \begin{cases} 5a_1 + \frac{5 \times 4}{2}d = 45 \\ 6a_1 + \frac{6 \times 5}{2}d = 60 \end{cases}, \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} d = 2 \\ a_1 = 5 \end{cases}, \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\therefore a_n = 2n + 3; \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$(2) \frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{1}{(2n+3)(2n+5)} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+5} \right), \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\therefore T_n = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+5} \right) \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$= \frac{1}{10} - \frac{1}{4n+10} = \frac{n}{10n+25} \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

$$18. \text{ 解：(1) } K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}, \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$= \frac{100(20 \times 20 - 30 \times 30)^2}{60 \times 40 \times 50 \times 50} = 4 > 3.841 \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

故有 95% 的把握认为喜欢旅游与性别有关； $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

(2) 按分层抽样喜欢旅游的男性为 2 人，记为  $A_1, A_2$ ，女性为 3 人，记为  $B_1, B_2, B_3$ ， $\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

随机抽取 2 人的事件有： $(A_1, A_2), (A_1, B_1), (A_1, B_2), (A_1, B_3), (A_2, B_1), (A_2, B_2), (A_2, B_3), (B_1, B_2), (B_1, B_3), (B_2, B_3)$ ， $\dots\dots\dots 8 \text{ 分}$

不同性别的事件为:

$(A_1, B_1), (A_1, B_2), (A_1, B_3), (A_2, B_1), (A_2, B_2), (A_2, B_3), \dots$  10分

故两人是不同性别的概率  $P = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ . ..... 12分

19. 解: (1)  $\because 4\overline{BA} \cdot \overline{BC} = 3bc \cdot \sin A$   
 $\therefore 4a \cdot \cos B = 3b \cdot \sin A$  ..... 2分

$\therefore 4 \sin A \cos B = 3 \sin B \sin A$ , ..... 3分

$\therefore \tan B = \frac{4}{3}$ , 则  $\cos B = \frac{3}{5}$ , ..... 4分

又  $\because 4\overline{BA} \cdot \overline{BC} = 24c$ ,  
 $\therefore 4ac \cos B = 24c$ , ..... 5分

$\therefore a \cos B = 6$ ,  
 $\therefore a = \frac{6}{\cos B} = 6 \times \frac{5}{3} = 10$ ; ..... 6分

(2) 由余弦定理:  $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B$ , ..... 7分

$\therefore b^2 = 100 + c^2 - 12c$ , ..... 8分

又  $a + b + c = 48$ , 则  $b + c = 38$ , ..... 9分

$\therefore (38 - c)^2 = 100 + c^2 - 12c$ , ..... 10分

$\therefore c = 21$ , ..... 11分

$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ac \cdot \sin B = \frac{1}{2} \times 10 \times 21 \times \frac{4}{5} = 84$ . ..... 12分

20. 解: (1) 设  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ,

联立  $\begin{cases} y = kx - 2 \\ x^2 = 2py \end{cases}$ , 消  $y$  整理得:  $x^2 - 2pkx + 4p = 0$ , ..... 2分

所以:  $x_1 + x_2 = 2pk$ ,  $x_1x_2 = 4p$ , ..... 3分

$$k_{FA} k_{FB} = \frac{y_1 - \frac{p}{2}}{x_1} + \frac{y_2 - \frac{p}{2}}{x_2} = \frac{kx_1 - (2 + \frac{p}{2})}{x_1} + \frac{kx_2 - (2 + \frac{p}{2})}{x_2}$$

$$= \frac{2kx_1x_2 - (2 + \frac{p}{2})(x_1 + x_2)}{x_1x_2}$$

$$= 2k - \frac{k}{2}(2 + \frac{p}{2}) = k(1 - \frac{p}{4}) = 0, \dots\dots\dots 4 \text{分}$$

∴  $p = 4$ , 即抛物线  $E$  的方程为:  $x^2 = 8y$ ;  $\dots\dots\dots 5 \text{分}$

(2) 由 (1) 可知:  $x_1 + x_2 = 8k$ ,  $x_1x_2 = 16$   $\dots\dots\dots 6 \text{分}$

且  $\Delta = 64k^2 - 64 > 0$ , 所以:  $k^2 > 1$ ,

$$|x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} = 8\sqrt{k^2 - 1}, \dots\dots\dots 7 \text{分}$$

直线  $EA$  的方程为:  $y = \frac{y_1 - 2}{x_1}x + 2$ , 所以:  $x_M = \frac{4x_1}{2 - y_1} = \frac{4x_1}{4 - kx_1}$ ,  $\dots\dots 8 \text{分}$

同理:  $x_N = \frac{4x_2}{2 - y_2} = \frac{4x_2}{4 - kx_2}$ ,

所以  $|MN| = |x_M - x_N| = \left| \frac{4x_1}{4 - kx_1} - \frac{4x_2}{4 - kx_2} \right| \dots\dots\dots 9 \text{分}$

$$= \left| \frac{16(x_1 - x_2)}{16 - 4k(x_1 + x_2) + k^2x_1x_2} \right| \dots\dots\dots 10 \text{分}$$

$$= \frac{8\sqrt{k^2 - 1}}{|1 - k^2|} = \frac{8}{\sqrt{k^2 - 1}} \geq 16 \dots\dots\dots 11 \text{分}$$

解得:  $-\frac{\sqrt{5}}{2} \leq k < -1$  或  $1 < k \leq \frac{\sqrt{5}}{2}$ .  $\dots\dots\dots 12 \text{分}$

21. 解: (1)  $f'(x) = 2\cos x - 2ax + 3$ ,  $\dots\dots\dots 1 \text{分}$

∴  $f'(0) = 2\cos 0 + 3 = 5$ ,  $\dots\dots\dots 2 \text{分}$

切线斜率为 5,  $\dots\dots\dots 3 \text{分}$

曲线  $f(x)$  在  $x=0$  处的切线方程为  $y=5x$ .  $\dots\dots\dots 4 \text{分}$

(2) 解法一: ① 当  $x \in [0, \pi]$  时  $f'(x) = 2\cos x - 2ax + 3$ ,  $\dots\dots\dots 5 \text{分}$

若  $a < 0$  时,  $2\cos x > 2ax - 3$  恒成立,

若  $a \geq 0$  时  $f'(x)$  在  $[0, \pi]$  上单调递减.  $\dots\dots\dots 6 \text{分}$

$\therefore f'(x) \geq f'(\pi) = -2 - 2a\pi + 3 \geq 0$ , 则  $0 \leq a \leq \frac{1}{2\pi}$ , ..... 7分

综上:  $a \leq \frac{1}{2\pi}$ ; ..... 8分

②当  $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$  时

若  $a \geq 0$  时,  $2\cos x > 2ax - 3$  恒成立,

$\therefore f'(x) \geq 0$  恒成立, ..... 9分

若  $a < 0$  时  $f'(x)$  在  $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$  上单调递增.

$\therefore f'(x) \geq f'\left(-\frac{\pi}{2}\right) = a\pi + 3 \geq 0$ , 则  $-\frac{3}{\pi} \leq a < 0$ , ..... 10分

$\therefore a \geq -\frac{3}{\pi}$ , ..... 11分

综上所述:  $-\frac{3}{\pi} \leq a \leq \frac{1}{2\pi}$ . ..... 12分

解法二: 由 (1) 可知  $f'(0) = 2 + 3 = 5 > 0$ ,

$\therefore f(x)$  在  $\left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]$  上必是单调递增函数, ..... 5分

令  $f'(x) = 2\cos x - 2ax + 3$ ,

则  $f'\left(-\frac{\pi}{2}\right) = a\pi + 3 \geq 0$ ,  $f'(\pi) = 1 - 2a\pi \geq 0$ , ..... 6分

$\therefore -\frac{3}{\pi} \leq a \leq \frac{1}{2\pi}$  为  $f(x)$  在  $\left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]$  上是增函数成立的必要条件, ..... 7分

令  $f'(x) = 2\cos x - 2ax + 3$ ,

下证: 当  $-\frac{3}{\pi} \leq a \leq \frac{1}{2\pi}$  时,  $f'(x) \geq 0$  对任意  $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]$  恒成立, ..... 8分

①当  $0 \leq a \leq \frac{1}{2\pi}$  时,  $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ , 则  $ax \in \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$ ,  $-2ax \in \left[-1, \frac{1}{2}\right]$ ,

$\therefore f'(x) = 2\cos x - 2ax + 3 \geq 1 - 2ax \geq 0$ ; ..... 9分

②当  $-\frac{3}{\pi} \leq a < 0$  时,

$x \in [0, \pi]$ ,  $-2ax > 0$ , 很显然  $f'(x) > 2\cos x + 3 > 0$ ;

$x \in [-\frac{\pi}{2}, 0]$ ,  $f'(x)$  为增函数,  $f'(x) \geq f'(-\frac{\pi}{2}) \geq a\pi + 3 \geq 0$ ; ..... 10分

$\therefore$  当  $-\frac{3}{\pi} \leq a \leq \frac{1}{2\pi}$  时,  $g(x) \geq 0$  对任意  $x \in [-\frac{\pi}{2}, \pi]$  恒成立, ..... 11分

$\therefore -\frac{3}{\pi} \leq a \leq \frac{1}{2\pi}$ , 使得  $f(x)$  在  $[-\frac{\pi}{2}, \pi]$  上是单调函数. .... 12分

22. (1) 由题意:  $(\frac{x}{3})^2 + (\frac{y}{2})^2 = 1 - t^2 + t^2 = 1$ , 且  $x = 3\sqrt{1-t^2} \geq 0$ , ..... 2分

$\therefore$  曲线 C 的普通方程为:  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 (x \geq 0)$  ..... 3分

$\therefore$  曲线 C 的极坐标方程为  $\frac{\rho^2 \cos^2 \theta}{9} + \frac{\rho^2 \sin^2 \theta}{4} = 1 (-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2})$ ,

即  $\rho^2 = \frac{36}{4+5\sin^2 \theta} (-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2})$ ; ..... 5分

(2) 由 (1) 得  $\rho^2 = \frac{36}{4+5\sin^2 \theta}$ ,

因为且  $OA \perp OB$ , 不妨设  $A(\rho_1, \theta)$ ,  $B(\rho_2, \theta + \frac{\pi}{2})$ , ..... 6分

$\therefore \rho_1^2 = \frac{36}{4+5\sin^2 \theta}$ , ..... 7分

$\therefore \rho_2^2 = \frac{36}{4+5\sin^2(\theta + \frac{\pi}{2})} = \frac{36}{4+5\cos^2 \theta}$ , ..... 8分

$\therefore \frac{1}{|OA|^2} + \frac{1}{|OB|^2} = \frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2}$  ..... 9分

$= \frac{4+5\sin^2 \theta + 4+5\cos^2 \theta}{36} = \frac{8+5}{36} = \frac{13}{36}$ . ..... 10分

23. (1) 证明: 因为  $(\frac{1}{a} + \frac{1}{b})(ax^2 + by^2) = x^2 + \frac{ax^2}{b} + \frac{by^2}{a} + y^2$

$\geq x^2 + y^2 + 2\sqrt{\frac{ax^2}{b} \cdot \frac{by^2}{a}} = x^2 + y^2 + 2xy = (x+y)^2$ , ..... 3分

$\therefore \frac{(x+y)^2}{ax^2 + by^2} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ , ..... 4分

当且仅当  $\frac{ax^2}{b} = \frac{by^2}{a}$ ，即  $ax = by$  时，等号成立；…………… 5分

(2) 函数  $f(x) = \frac{4x^2 + 4x + 1}{5x^2 + 4x + 2} = \frac{(2x+1)^2}{3 \cdot x^2 + 2 \cdot (x+1)^2}$ …………… 7分

根据 (1) 的结论， $\frac{[x+(x+1)]^2}{3 \cdot x^2 + 2 \cdot (x+1)^2} \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$ ，…………… 8分

当且仅当  $3x = 2(x+1)$ ，即  $x = 2$  时，等号成立。…………… 9分

∴ 函数  $f(x) = \frac{4x^2 + 4x + 1}{5x^2 + 4x + 2}$  ( $x > 0$ ) 的最大值为  $\frac{5}{6}$ ，此时  $x = 2$ 。…………… 10分