绵阳市高中2021级第二次诊断性考试

理科数学参考答案及评分意见

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，共60分．

ABACC　ABDDC　AB

二、填空题：本大题共4小题，每小题5分，共20分．

13．$\frac{\sqrt{2}}{10}$　　14．$\frac{3}{7}$　　15．$\frac{1}{2}$　　16．$\sqrt{2}x\pm y=0$

三、解答题：本大题共6小题，共70分．

17．解：（1）设数列$\{a_n\}$的公差是d，

则$\begin{cases}5a_1+\frac{5\times 4}{2}d=45\\ 6a_1+\frac{6\times 5}{2}d=60\end{cases}$，……………………………………3分

解得$\begin{cases}d=2\\ a_1=5\end{cases}$，……………………………………4分

$\therefore a_n=2n+3$；……………………………………6分

（2）$\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{(2n+3)(2n+5)}=\frac{1}{2}(\frac{1}{2n+3}-\frac{1}{2n+5})$，……………………8分

$\therefore T_n=\frac{1}{2}(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{1}{9}+...+\frac{1}{2n+3}-\frac{1}{2n+5})$……………………10分

$=\frac{1}{10}-\frac{1}{4n+10}=\frac{n}{10n+25}$．……………………12分

18．解：（1）$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$

$=\frac{100(20\times 20-30\times 30)^2}{60\times 40\times 50\times 50}$=4>3.841，……………………4分

故有95%的把握认为喜欢旅游与性别有关．……………………5分

（2）根据题意，全市男性市民喜欢旅游的概率为$\frac{2}{5}$，$\xi\sim(2,\frac{2}{5})$，…………6分

ξ的可以取值为0，1，2，……………………7分

$P(\xi=0)=(\frac{3}{5})^2=\frac{9}{25}$，……………………8分

$P(\xi=1)=C_2^1(\frac{2}{5})^1(\frac{3}{5})^1=\frac{12}{25}$， ………………………………………………………… 9 分

$P(\xi=2)=(\frac{2}{5})^2=\frac{4}{25}$， ………………………………………………………………… 10 分

ξ 的分布列如下：

ξ	0	1	2
P	$\frac{9}{25}$	$\frac{12}{25}$	$\frac{4}{25}$

………………………………………………………………………………………………… 11 分

$\therefore E(\xi)=2\times\frac{2}{5}=\frac{4}{5}$. ………………………………………………………………… 12 分

19．解：（1）$\because a(b\cos c-c\cos B)=a(b\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}-c\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac})$ ………………… 2 分

$=\frac{2b^2-2c^2}{2}=b^2-c^2=c^2$， ………………………………………………… 4 分

$\therefore b^2=2c^2$； ……………………………………………………………………………… 5 分

（2）$\because \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=c$，

$\therefore c\cdot a\cdot\cos B=c$， ……………………………………………………………………… 6 分

$\therefore a\cos B=1$，① ………………………………………………………………………… 7 分

又$\because b\sin A=\sqrt{2}$，②

$\frac{②}{①}$ 得：$\frac{b\sin A}{a\cos B}=\frac{\sin B\sin A}{\sin A\cos B}=\tan B=\sqrt{2}$， ……………………………………… 8 分

又$\because B$ 是$\triangle ABC$ 的内角，

$\therefore \cos B=\frac{\sqrt{3}}{3}$，又 $a\cos B=1$，则 $a=\frac{1}{\cos B}=\sqrt{3}$， ………………………………… 9 分

$\therefore$在$\triangle ABC$ 中，由余弦定理得：

$\therefore b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=3+c^2-2c$， ……………………………………… 10 分

由（1）知：$b^2=2c^2$，

$\therefore 2c^2=3+c^2-2c$，

$\therefore c=1$ 或 $c=-3$（舍）， ………………………………………………………………… 11 分

又 $b^2=2c^2$，则 $b=\sqrt{2}$． ………………………………………………………………… 12 分

20．**解**：（1）设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

联立 $\begin{cases} y=kx-2 \\ x^2=2py \end{cases}$，消 y 整理得：$x^2-2pkx+4p=0$，…………………………… 2 分

所以：$x_1+x_2=2pk$，$x_1x_2=4p$，…………………………………………………3 分

$$\therefore k_{FA}k_{FB}=\frac{y_1-\frac{p}{2}}{x_1}+\frac{y_2-\frac{p}{2}}{x_2}=\frac{kx_1-(2+\frac{p}{2})}{x_1}+\frac{kx_2-(2+\frac{p}{2})}{x_2}$$

$$=\frac{2kx_1x_2-(2+\frac{p}{2})(x_1+x_2)}{x_1x_2}$$

$=2k-\frac{k}{2}(2+\frac{p}{2})=k(1-\frac{p}{4})=0$ ………………………………………………4 分

所以 $p=4$，即抛物线 E 的方程为：$x^2=8y$；…………………………………… 5 分

（2）由（1）可知：$x_1+x_2=8k$，$x_1x_2=16$ ………………………………………6 分

且 $\Delta=64k^2-64>0$，所以：$k^2>1$，

$|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=8\sqrt{k^2-1}$，…………………………………… 7 分

直线 FA 的方程为：$y=\frac{y_1-2}{x_1}x+2$，所以：$x_M=\frac{4x_1}{2-y_1}=\frac{4x_1}{4-kx_1}$，…… 8 分

同理：$x_N=\frac{4x_2}{2-y_2}=\frac{4x_2}{4-kx_2}$，

所以 $|MN|=|x_M-x_N|=|\frac{4x_1}{4-kx_1}-\frac{4x_2}{4-kx_2}|$ ………………………………………9 分

$=|\frac{16(x_1-x_2)}{16-4k(x_1+x_2)+k^2x_1x_2}|$ ……………………………………………10 分

$=\frac{8\sqrt{k^2-1}}{|1-k^2|}=\frac{8}{\sqrt{k^2-1}}\geq 16$ ……………………………………………11 分

解得：$-\frac{\sqrt{5}}{2}\leq k<-1$ 或 $1<k\leq\frac{\sqrt{5}}{2}$．…………………………………………12 分

21．**解**：（1）令 $g(x)=x^2+ax-a$，则 $g(x)$ 在$[0，+\infty)$上至少有一个零点．……… 1 分

$g(x)$的对称轴为：$x=-\frac{a}{2}$，

①当 a=0 时，$g(x)=x^2$在[0，+∞)上恰有一个零点，符合题意；……………2 分

②当 a>0 时，对称轴$x=-\frac{a}{2}$<0，则$g(x)$在[0，+∞)是增函数，

而$g(0)=-a<0$，$g(1)=1>0$，

∴$g(x)$在[0，+∞)上必有一个零点，符合题意；……………………………3 分

③当 a<0 时，对称轴$x=-\frac{a}{2}>0$，

则$g(x)$在$[0，-\frac{a}{2})$上是减函数，在$[-\frac{a}{2}，+\infty)$是增函数，

∵$g(x)$在[0，+∞)上至少有一个零点，

∴只需$\Delta=a^2+4a\geqslant 0$，则$a\leqslant -4$，…………………………………………4 分

综上所述，a 的取值范围为$(-\infty,-4]\cup[0,+\infty)$．……………………………5 分

（2）**解法一：** $f'(x)=\frac{-(x+a)(x-2)}{e^x}$，…………………………………………6 分

∵$f(x)$在 **R** 上是单调函数，则$a=-2$，…………………………………………7 分

∴$f(x)$在 **R** 上是单调递减函数，

∴$f(x)=\frac{x^2-2x+2}{e^x}$，要证$x_1+x_2\geqslant 2$，即证$x_1\geqslant 2-x_2$，

结合$f(x)$在 **R** 上是减函数，所以只需证$f(x_1)\leqslant f(2-x_2)$，…………………8 分

而$f(x_1)=\frac{2}{e}-f(x_2)$，即证$f(2-x_2)+f(x_2)-\frac{2}{e}\geqslant 0$（*）………………………9 分

令$h(x)=f(2-x)+f(x)=\frac{x^2-2x+2}{e^x}+\frac{x^2-2x+2}{e^{2-x}}$ ………………… 10 分

$=(x^2-2x+2)(\frac{1}{e^x}+\frac{1}{e^{2-x}})$ ………………………………………… 11 分

$\geqslant 1\cdot 2\sqrt{\frac{1}{e^x}\cdot\frac{1}{e^{2-x}}}=2\sqrt{\frac{1}{e^2}}=\frac{2}{e}$，当 x=1 时，等号成立，

∴（*）成立.命题得证. ……………………………………………………………… 12 分

解法二： $f'(x)=\frac{-(x+a)(x-2)}{e^x}$，…………………………………………6 分

$\because f(x)$ 在 **R** 上是单调函数，则 $a=-2$，

$\therefore f(x)$ 在 **R** 上是单调递减函数，

$\therefore f(x)=\dfrac{x^2-2x+2}{e^x}$， $f'(x)=\dfrac{-(x-2)^2}{e^x}$，且 $f(1)=\dfrac{1}{e}$，

当 $x_1=x_2=1$ 时， $f(x_1)+f(x_2)=\dfrac{2}{e}$，符合题意；

当 $x_1<x_2\leqslant 1$ 时， $f(x_1)+f(x_2)>\dfrac{2}{e}$，不符合题意；

当 $1\leqslant x_1<x_2$ 时， $f(x_1)+f(x_2)<\dfrac{2}{e}$，不符合题意；……………………………………7 分

$\therefore x_1<1<x_2$， 要证 $x_1+x_2>2$，即证 $x_1>2-x_2$，

结合 $f(x)$ 在 **R** 上是减函数，所以只需证 $f(x_1)<f(2-x_2)$，

而 $f(x_1)=\dfrac{2}{e}-f(x_2)$，即证 $f(2-x_2)+f(x_2)-\dfrac{2}{e}>0$ 对任意 $x_2>1$ 成立.（*）……8 分

令 $h(x)=f(2-x)+f(x)-\dfrac{2}{e}$，

$\therefore h'(x)=-f'(2-x)+f'(x)=\dfrac{x^2}{e^{2-x}}+\dfrac{-(x-2)^2}{e^x}=\dfrac{(xe^x)^2-[e(x-2)]^2}{e^2e^x}$， …………………9 分

令 $p(x)=(xe^x)^2-[e(x-2)]^2=(xe^x+ex-2e)(xe^x-ex+2e)$，

函数 $y=xe^x+ex-2e$ 在$(1，+\infty)$上是增函数，则 $xe^x+ex-2e>0$， ………… 10 分

函数 $y=xe^x-ex+2e(x>1)$，则 $y'=(x+1)e^x-e>e$，

$\therefore y=xe^x-ex+2e$ 在$(1，+\infty)$上是增函数，则 $xe^x-ex+2e\geqslant 2e$， ……………11 分

$\therefore p(x)=h'(x)>0$ 在$(1，+\infty)$上恒成立，

$\therefore h(x)$ 在$(1，+\infty)$上是增函数，则 $h(x)>h(1)=0$，

$\therefore$（*）成立，命题得证. ………………………………………………………… 12 分

22.（1）由题意：$(\dfrac{x}{3})^2+(\dfrac{y}{2})^2=1-t^2+t^2=1$，且 $x=3\sqrt{1-t^2}\geq 0$， ……………… 2 分

$\therefore$曲线 C 的普通方程为： $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1(x\geq 0)$ ……………………………………3 分

$\therefore$曲线 C 的极坐标方程为 $\dfrac{\rho^2\cos^2\theta}{9}+\dfrac{\rho^2\sin^2\theta}{4}=1$ （$-\dfrac{\pi}{2}\leq\theta\leq\dfrac{\pi}{2}$），

即 $\rho^2=\dfrac{36}{4+5\sin^2\theta}$ （$-\dfrac{\pi}{2}\leq\theta\leq\dfrac{\pi}{2}$）； ………………………………………5 分

（2）由（1）得 $\rho^2=\dfrac{36}{4+5\sin^2\theta}$，

因为且 $OA\perp OB$，不妨设 $A(\rho_1,\ \theta)$，$B(\rho_2,\ \theta+\dfrac{\pi}{2})$，……………………………6 分

$\therefore \rho_1{}^2=\dfrac{36}{4+5\sin^2\theta}$，…………………………………………………………………7 分

$\therefore \rho_2{}^2=\dfrac{36}{4+5\sin^2(\theta+\dfrac{\pi}{2})^2}=\dfrac{36}{4+5\cos^2\theta}$，………………………………………8 分

$\therefore \dfrac{1}{|OA|^2}+\dfrac{1}{|OB|^2}=\dfrac{1}{\rho_2{}^2}+\dfrac{1}{\rho_2{}^2}$ ……………………………………………………………9 分

$=\dfrac{4+5\sin^2\theta+4+5\cos^2\theta}{36}=\dfrac{8+5}{36}=\dfrac{13}{36}$. …………………………………… 10 分

23．（1）证明：因为 $(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b})(ax^2+by^2)=x^2+\dfrac{ax^2}{b}+\dfrac{by^2}{a}+y^2$

$\geq x^2+y^2+2\sqrt{\dfrac{ax^2}{b}\cdot\dfrac{by^2}{a}}=x^2+y^2+2xy=(x+y)^2$，………… 3 分

$\therefore \dfrac{(x+y)^2}{ax^2+by^2}\leq\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$，…………………………………………………………… 4 分

当且仅当 $\dfrac{ax^2}{b}=\dfrac{by^2}{a}$，即 $ax=by$ 时，等号成立；…………………………………5 分

（2）函数 $f(x)=\dfrac{4x^2+4x+1}{5x^2+4x+2}=\dfrac{(2x+1)^2}{5x^2+4x+2}=\dfrac{[x+(x+1)]^2}{3\cdot x^2+2\cdot(x+1)^2}$ ……………7 分

根据（1）的结论，$\dfrac{[x+(x+1)]^2}{3\cdot x^2+2\cdot(x+1)^2}\leq\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{6}$，……………………………8 分

当且仅当 $3x=2(x+1)$，即 $x=2$ 时，等号成立．…………………………………9 分

∴函数 $f(x)=\dfrac{4x^2+4x+1}{5x^2+4x+2}(x>0)$ 的最大值为 $\dfrac{5}{6}$，此时 x=2．……………… 10 分