成都市2021级高中毕业班第二次诊断性检测

数学(理科)参考答案及评分意见

第Ⅰ卷 (选择题,共60分)

一、选择题:(每小题5分,共60分)

1.B; 2.C; 3. B; 4.C; 5.A; 6.B; 7.D; 8.C; 9.D; 10.D; 11.A; 12.D.

第Ⅱ卷 (非选择题,共90分)

二、填空题:(每小题5分,共20分)

13.三棱柱,三棱锥,圆锥等(其他正确答案同样给分); 14. $(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$;

15. 4; 16.②③④.

三、解答题:(共70分)

17. 解:(Ⅰ)当 $n=1$ 时,$a_1=S_1(2)=0$. ……1分

当 $n\geqslant 2$ 时,$a_n=S_n(2)-S_{n-1}(2)=(2+2^2+\cdots 2^n-2)-(2+2^2+\cdots 2^{n-1}-2)=2^n$.

……5分

又当 $n=1$ 时,$a_1=0$ 不满足上式,

所以 $a_n=\begin{cases}0, & n=1,\\ 2^n, & n\geqslant 2.\end{cases}$ ……6分

(Ⅱ)$\because S_{2024}(x)=x+x^2+x^3+\cdots+x^{2024}-2$,

$\therefore S'_{2024}(x)=1+2x+3x^2+\cdots+2024x^{2023}$. ……7分

$S'_{2024}(2)=1+2\times 2+3\times 2^2+\cdots+2024\times 2^{2023}$ ……①,

$2S'_{2024}(2)=2+2\times 2^2+3\times 2^3+\cdots+2024\times 2^{2024}$ ……②,

①-②得,$-S'_{2024}(2)=1+1\times 2+1\times 2^2+\cdots+1\times 2^{2023}-2024\times 2^{2024}$ ……10分

$$=\frac{1-2^{2024}}{1-2}-2024\times 2^{2024}=-2023\times 2^{2024}-1.$$ ……11分

$\therefore S'_{2024}(2)=2023\times 2^{2024}+1$. ……12分

18. 解:(Ⅰ)已知本次模拟考试成绩都近似服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$,

由题意可得 $\mu=65$. ……1分

$\because \dfrac{228}{10000}=0.0228$,又 $\dfrac{1-P(\mu-2\sigma\leqslant X\leqslant\mu+2\sigma)}{2}=0.0228$. ……3分

即 $P(X>\mu+2\sigma)=0.0228$. $\therefore \mu+2\sigma=87$,解得 $\sigma=11$. ……4分

$\because$甲市学生 A 在该次考试中成绩为76分,且 $76=\mu+\sigma$,

又 $\dfrac{1-P(\mu-\sigma\leqslant X\leqslant\mu+\sigma)}{2}=0.1587$,即 $P(X>\mu+\sigma)=0.1587$. ……5分

$\therefore$学生 A 在甲市本次考试的大致名次为1587名. ……6分

(Ⅱ)在本次考试中,抽取1名化学成绩在 $(\mu-3\sigma,\mu+3\sigma)$ 之内的概率为0.9974.

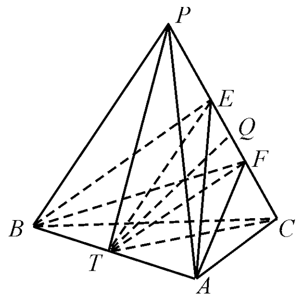
$\therefore$抽取1名化学成绩在 $(\mu-3\sigma,\mu+3\sigma)$ 之外的概率为0.0026. ……7分

∴随机变量 X 服从二项分布,即 $X \sim B(40,0.0026)$. ……9 分

∴ $P(X \geqslant 1)=1-P(X=0)=1-0.9974^{40} \approx 0.0989$. ……10 分

X 的数学期望为 $EX=np=40\times 0.0026=0.104$. ……12 分

19. 解:(Ⅰ)取 AB 的中点为 T,连接 PT,CT.



∵四面体 $P-ABC$ 为正四面体,

∴$\triangle ABP$ 为正三角形. ……1 分

又 T 为 AB 的中点,

∴ $PT \perp AB$.同理可得 $CT \perp AB$. ……3 分

∵ $PT \cap CT=T$,$PT,CT \subset$平面 PTC,

∴ $AB \perp$ 平面 PTC. ……5 分

又 $PC \subset$ 平面 PTC,∴ $AB \perp PC$. ……6 分

(Ⅱ)取 PC 的中点为 Q,连接 ET,FT,QT,设 $PA=6a$.

由(Ⅰ)得 $AB \perp$ 平面 PTC.

∵ $ET,FT \subset$ 平面 PTC,∴ $AB \perp ET$,$AB \perp FT$.

∴ $\angle PTE$ 为二面角 $P-AB-E$ 的平面角,$\angle ETF$ 为二面角 $E-AB-F$ 的平面角,$\angle FTC$ 为二面角 $F-AB-C$ 的平面角. ……7 分

由图形对称性可判断 $\angle PTE=\angle FTC$. ……8 分

易得 $PT=CT=3\sqrt{3}a$,∴$TQ \perp PC$.

在$\triangle TPQ$ 中,$TQ=\sqrt{PT^2-PQ^2}=3\sqrt{2}a$.

在$\triangle ETQ$ 中,$ET=\sqrt{EQ^2+TQ^2}=\sqrt{19}a$.同理可得 $FT=\sqrt{19}a$.

∴ $\cos\angle PTE=\dfrac{PT^2+ET^2-PE^2}{2PT\cdot ET}=\dfrac{7\sqrt{57}}{57}$,$\cos\angle ETF=\dfrac{ET^2+FT^2-EF^2}{2ET\cdot FT}=\dfrac{17}{19}$.

……11 分

∵ $\cos\angle PTE > \cos\angle ETF$,∴ $\angle PTE < \angle ETF$.

∴二面角 $E-AB-F$ 的平面角最大,其余弦值等于 $\dfrac{17}{19}$. ……12 分

20. 解:(Ⅰ)设 $M(x_1,y_1)$,$S(x_1,-y_1)$.

∵ $k_{AM}=\dfrac{y_1}{x_1+a}$,$k_{BS}=\dfrac{-y_1}{x_1-a}$, ……1 分

∴ $k_{AM}\cdot k_{BS}=\dfrac{y_1}{x_1+a}\cdot\dfrac{-y_1}{x_1-a}=\dfrac{-y_1^2}{x_1^2-a^2}$. ……2 分

∵$M(x_1,y_1)$ 在双曲线 C:$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{5}=1(a>0)$ 上,

∴ $k_{AM}\cdot k_{BS}=\dfrac{-y_1^2}{x_1^2-a^2}=\dfrac{-5(\frac{x_1^2}{a^2}-1)}{x_1^2-a^2}=-\dfrac{5}{a^2}=-\dfrac{5}{4}$.解得 $a=2$. ……4 分

∴双曲线 C 的标准方程为 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1$. ……5 分

(Ⅱ)设 $N(x_2,y_2)$,直线 MN:$x=my+3$.

由 $\begin{cases} x=my+3, \\ \dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1 \end{cases}$ 消去 x，得 $(5m^2-4)y^2+30my+25=0$.

$m\neq\pm\dfrac{2}{\sqrt{5}}$，$\Delta=400(m^2+1)>0$.

$\therefore\ y_1+y_2=\dfrac{-30m}{5m^2-4}$，$y_1y_2=\dfrac{25}{5m^2-4}$. ……6 分

直线 BM：$y=\dfrac{y_1}{x_1-2}(x-2)$，

令 $x=1$，解得 $y_P=\dfrac{-y_1}{x_1-2}$. 同理可得 $y_Q=\dfrac{-y_2}{x_2-2}$. ……7 分

$\because$ 以 PQ 为直径的圆的方程为 $(x-1)(x-1)+(y+\dfrac{y_1}{x_1-2})(y+\dfrac{y_2}{x_2-2})=0$，

……8 分

由对称性可得，若存在定点，则定点一定在 x 轴上.

令 $y=0$，得 $(x-1)^2+\dfrac{y_1}{x_1-2}\cdot\dfrac{y_2}{x_2-2}=0$.

$$\therefore\ (x-1)^2+\frac{y_1y_2}{(x_1-2)(x_2-2)}=(x-1)^2+\frac{y_1y_2}{(my_1+1)(my_2+1)}$$

$$=(x-1)^2+\frac{\frac{25}{5m^2-4}}{m^2\cdot\frac{25}{5m^2-4}+m\cdot\frac{-30m}{5m^2-4}+1}$$

$$=(x-1)^2+\frac{25}{25m^2-30m^2+5m^2-4}$$

$$=(x-1)^2-\frac{25}{4}=0.$$ ……10 分

$\therefore\ (x-1)^2=\dfrac{25}{4}$，解得 $x=-\dfrac{3}{2}$ 或 $x=\dfrac{7}{2}$.

$\therefore$ 以 PQ 为直径的圆恒过点 $(-\dfrac{3}{2},0)$，$(\dfrac{7}{2},0)$. ……12 分

21. 解：(Ⅰ)当 $a=\dfrac{1}{8}$ 时，$f(x)=\dfrac{1}{4}e^x-\sqrt{x}$，$f(0)=\dfrac{1}{4}\neq 0$.

$\because\ f'(x)=\dfrac{1}{4}e^x-\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$，$f''(x)=\dfrac{1}{4}e^x+\dfrac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$， ……1 分

当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f''(x)>0$，

$\therefore$ 函数 $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增. ……2 分

由 $f'(\dfrac{1}{4})=\dfrac{1}{4}e^{\frac{1}{4}}-1<0$，$f'(1)=\dfrac{1}{4}e-\dfrac{1}{2}>0$，

$\therefore\ \exists x_0\in(\dfrac{1}{4},1)$，使得 $f'(x_0)=0$. ……3 分

$\therefore$ 当 $x\in(0,x_0)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；

当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增.

又 $f(\frac{1}{100})=\frac{1}{4}e^{\frac{1}{100}}-\frac{1}{10}>0$，$f(1)=\frac{1}{4}e-1<0$，$f(4)=\frac{1}{4}e^4-2>0$，

$\therefore f(x)$ 有两个零点. ……5 分

（Ⅱ）$\because$ 存在 $b\in(0,+\infty)$，使得当 $x\in(b,b+2024)$ 时，$f(x)>e^x-a\ln(x+1)+2a-1$，

即存在 $b\in(0,+\infty)$，使得当 $x\in(b,b+2024)$ 时，$(2a-1)(e^x-1)+a\ln(x+1)-\sqrt{x}>0$.

设 $g(x)=(2a-1)(e^x-1)+a\ln(x+1)-\sqrt{x}$.

(i)当 $a>\frac{1}{2}$ 时，设 $h(x)=e^x-x-1$.

$\therefore h'(x)=e^x-1$.

$\because h'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，又 $h'(0)=0$，

$\therefore h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增. 又 $h(0)=0$，

$\therefore h(x)>0$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上恒成立. ……6 分

$\therefore g(x)=(2a-1)(e^x-1)+a\ln(x+1)-\sqrt{x}>(2a-1)x-\sqrt{x}$.

$\therefore$ 当 $x\geqslant\frac{1}{(2a-1)^2}$ 时，$g(x)>0$.

取 $b=\frac{1}{(2a-1)^2}$，当 $x\in(b,b+2024)$ 时，$g(x)>0$ 恒成立.

$\therefore$ 当 $a>\frac{1}{2}$ 时满足题意. ……8 分

(ii)当 $a\leqslant\frac{1}{2}$ 时，设 $w(x)=2e^x+\ln(x+1)-2$.

$\therefore w'(x)=2e^x+\frac{1}{x+1}$.

$\because w'(x)>0$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上恒成立，$\therefore w(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

又 $w(0)=0$，$\therefore w(x)>0$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上恒成立. ……9 分

$\therefore g(x)=a[2e^x+\ln(x+1)-2]-e^x-\sqrt{x}+1\leqslant e^x+\frac{1}{2}\ln(x+1)-1-e^x-\sqrt{x}+1$

$=\frac{1}{2}\ln(x+1)-\sqrt{x}$. ……10 分

设 $n(x)=\frac{1}{2}\ln(x+1)-\sqrt{x}$.

$\therefore n'(x)=\frac{1}{2(x+1)}-\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}-(x+1)}{2(x+1)\sqrt{x}}=\frac{-(\sqrt{x}-\frac{1}{2})^2-\frac{3}{4}}{2(x+1)\sqrt{x}}$.

$\because n'(x)<0$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上恒成立，$\therefore n(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减.

又 $n(0)=0$，$\therefore n(x)<0$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上恒成立.

故 $g(x)\leqslant 0$ 恒成立，不合题意.

综上，a 的取值范围为 $(\frac{1}{2},+\infty)$. ……12 分

22. 解:(Ⅰ)由曲线 C 的参数方程可得 $(x-2)^2+y^2=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha$， ……1 分

化简得曲线 C 的普通方程为 $(x-2)^2+y^2=1$. ……3 分

(Ⅱ)曲线 C 的极坐标方程为 $\rho^2-4\rho\cos\theta+3=0$. ……5 分

设 $A(\rho_1,\theta_1)$，$B(\rho_1,\theta_1+\dfrac{\pi}{2})$，$M(\rho,\theta)$. ……6 分

$\because\ \rho=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\rho_1,\theta=\theta_1+\dfrac{\pi}{4}$，

$\therefore\ \rho_1=\sqrt{2}\rho,\theta_1=\theta-\dfrac{\pi}{4}$. ……8 分

$\therefore\ (\sqrt{2}\rho)^2-4\times\sqrt{2}\rho\cos(\theta-\dfrac{\pi}{4})+3=0$.

$\therefore$ M 的轨迹的极坐标方程为 $\rho^2-2\sqrt{2}\rho\cos(\theta-\dfrac{\pi}{4})+\dfrac{3}{2}=0$. ……10 分

23. 解:(Ⅰ)$\because\ |x+a|+b<4$,易知 $4-b>0$,

$\therefore\ b-a-4<x<4-a-b$. ……3 分

$\because\ f(x)<4$ 的解集为 $\{x\,|\,0<x<6\}$，

$\therefore\ \begin{cases}b-a-4=0,\\4-a-b=6\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-3,\\b=1.\end{cases}$ ……5 分

(Ⅱ)由(Ⅰ)得 $f(x)=|x-3|+1$,

$\therefore\ f(x)$ 的最小值为 1,即 $m+2n+3p=1$. ……6 分

$\therefore\ \dfrac{1}{m+2p}+\dfrac{1}{2n+p}=(\dfrac{1}{m+2p}+\dfrac{1}{2n+p})(m+2p+2n+p)=1+1+\dfrac{2n+p}{m+2p}+$
$\dfrac{m+2p}{2n+p}\geqslant 4$. ……9 分

当且仅当 $m+2p=2n+p=\dfrac{1}{2}$时,等号成立.

$\therefore\ \dfrac{1}{m+2p}+\dfrac{1}{2n+p}$ 的最小值为 4. ……10 分