成都市2021级高中毕业班第三次诊断性检测

数学(文科)参考答案及评分意见

第Ⅰ卷 (选择题,共60分)

一、选择题:(每小题5分,共60分)

1. D; 2. B; 3. C; 4. D; 5. A; 6. B; 7. C; 8. A; 9. A; 10. C; 11. B; 12. B.

第Ⅱ卷 (非选择题,共90分)

二、填空题:(每小题5分,共20分)

13. 4; 14. $\frac{7}{8}$; 15. 3; 16. $\frac{1}{4}$.

三、解答题:(共70分)

17. **解:**(Ⅰ)由题意,样本中500名学生寒假期间每天课外阅读平均时长的平均数

$$\bar{t}=10\times\frac{50}{500}+30\times\frac{100}{500}+50\times\frac{200}{500}+70\times\frac{125}{500}+90\times\frac{25}{500}=49.$$

所以估计这500名学生寒假期间每天课外阅读平均时长的平均数为49. ……6分

(Ⅱ)抽取的6人中寒假期间每天课外阅读平均时长在$[0,20)$内有:$6\times\frac{1}{3}=2$人,

在$[20,40)$内有:$6\times\frac{2}{3}=4$人, ……8分

设$[0,20)$内的2人记为:A,B;$[20,40)$内的4人记为:a,b,c,d.

从这6人中随机选2人的基本事件有:

$(A,B)(A,a)(A,b)(A,c)(A,d)(B,a)(B,b)(B,c)(B,d)(a,b)(a,c)$

$(a,d)(b,c)(b,d)(c,d)$共15种, ……10分

其中至少有一人每天课外阅读平均时长在$[0,20)$的基本事件有

$(A,B)(A,a)(A,b)(A,c)(A,d)(B,a)(B,b)(B,c)(B,d)$共9种, ……11分

设$M=$“选取的2人中至少有一人每天课外阅读平均时长在$[0,20)$”,则

$P(M)=\frac{9}{15}=\frac{3}{5}$. ……12分

18. **解:**(Ⅰ)当$n=1$时,$2a_1=S_1+1=a_1+1$,得$a_1=1$, ……1分

由$2a_n=S_n+n$,①

当$n\geqslant 2$时,$2a_{n-1}=S_{n-1}+n-1$②, ……2分

①-②得:$2(a_n-a_{n-1})=S_n-S_{n-1}+1=a_n+1$,

整理得:$a_n=2a_{n-1}+1(n\geqslant 2)$, ……4分

所以$a_n+1=2(a_{n-1}+1)(n\geqslant 2)$,且$a_1+1=2$, ……5分

$\therefore \{a_n+1\}$ 是以 2 为首项,2 为公比的等比数列. ……6 分

(Ⅱ)由(Ⅰ)得 $a_n+1=(a_1+1)\cdot 2^{n-1}=2^n$, ……8 分

$\therefore b_n=\log_2 2^n=n$, $c_n=\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$. ……10 分

$\therefore T_n=1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}=1-\dfrac{1}{n+1}=\dfrac{n}{n+1}$.

……12 分

19. **解:**(Ⅰ)在 $\triangle ADB$ 中,由余弦定理 $DB=\sqrt{AD^2+AB^2-2AD\cdot AB\cdot\cos\angle DAB}=\sqrt{3}$.

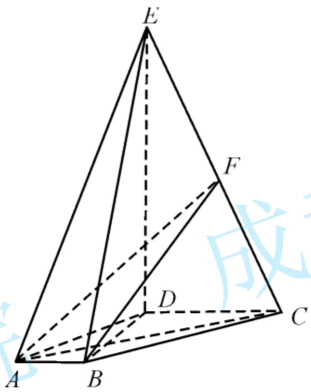
$\because AD^2=DB^2+AB^2$, $\therefore DB\perp AB$. ……2 分

$\because CD//AB, EB\perp CD$, $\therefore EB\perp AB$, ……4 分

$\because DB\perp AB, EB\cap DB=B$, $\therefore AB\perp$ 平面 EDB . ……5 分

又 $AB\subset$ 平面 $ABCD$,

$\therefore$ 平面 $EDB\perp$ 平面 $ABCD$. ……6 分



(Ⅱ) $\because F$ 是 EC 中点,

$\therefore V_{F-ABE}=\dfrac{1}{2}V_{C-ABE}=\dfrac{1}{2}V_{E-ABC}$. ……8 分

由(Ⅰ)得 $AB\perp$ 平面 EDB , $ED\subset$ 平面 EDB ,

$\therefore AB\perp ED$.

$\because ED\perp AD, AD\cap AB=A$, $\therefore ED\perp$ 平面 $ABCD$,

……10 分

$\therefore V_{E-ABC}=\dfrac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot ED=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times 1\times\sqrt{3}\times 4\sqrt{2}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$.

$\therefore V_{F-ABE}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

故三棱锥 $F-ABE$ 的体积为 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. ……12 分

20. **解:**(Ⅰ)直线 l 过坐标原点 O 时, $|AB|=2b=2$, $\therefore b=1$. ……2 分

又 $\because \dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\therefore \dfrac{b}{a}=\sqrt{1-\left(\dfrac{c}{a}\right)^2}=\dfrac{1}{2}$.

$\therefore a=2$. ……4 分

$\therefore$ 椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$. ……5 分

(Ⅱ)假设存在定点 $Q(0,m)$, $m\in[0,2]$,

设直线 l : $y=kx+2$, $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$,

由 $\begin{cases}y=kx+2,\\x^2+4y^2=4\end{cases}$ 消去 y ,得 $(4k^2+1)x^2+16kx+12=0$.

其中 $\Delta>0$,

$x_1+x_2=\dfrac{-16k}{4k^2+1}$, $x_1x_2=\dfrac{12}{4k^2+1}$. ……7 分

$k_{QA}+k_{QB}=\dfrac{m-y_1}{-x_1}+\dfrac{m-y_2}{-x_2}=\dfrac{m-(kx_1+2)}{-x_1}+\dfrac{m-(kx_2+2)}{-x_2}$

$=(2-m)(\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2})+2k=(2-m)\dfrac{x_1+x_2}{x_1x_2}+2k=(2-m)\dfrac{-4k}{3}+2k$

$=\dfrac{2k}{3}(2m-1)$. ……10 分

∴当 $m=\dfrac{1}{2}$ 时，$k_{QA}+k_{QB}=0$ 为定值.

∴存在定点 $Q(0,\dfrac{1}{2})$，使得直线 QA 与 直线 QB 的斜率之和恒为 0. ……12 分

21. **解**：(Ⅰ)当 $a=2$ 时，$f(x)=x\ln x-2\sqrt{x}+2(x>0)$，

$f'(x)=1+\ln x-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$， ……1 分

注意到函数 $y=\ln x$ 与 $y=-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ 均在 $(0,+\infty)$ 单调递增，

∴$f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增. ……3 分

由 $f'(1)=0$，

$x\in(0,1)$，$f'(x)<0$，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减；

$x\in(1,+\infty)$，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

综上，$f(x)$的单增区间为$(1,+\infty)$，单减区间为$(0,1)$. ……5 分

(Ⅱ)令 $\sqrt{x}=t>0$，

设函数 $g(t)=2t^2\ln t-at+a$，$g(1)=0$.

函数 $f(x)$ 有两个零点等价于函数 $g(t)$ 有两个零点.

①当 $a\leqslant 0$ 时，$g(t)=2t^2\ln t-at+a=2t^2\ln t-a(t-1)$，

当 $t>1$ 时，$g(t)>0$；当 $0<t<1$ 时，$g(t)<0$；当 $t=1$ 时，$g(t)=0$.

∴ $g(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上只有一个零点，故 $a\leqslant 0$ 不合题意. ……7 分

②当 $a>0$ 时，

$g'(t)=2t(2\ln t+1)-a$，令 $h(t)=2t(2\ln t+1)-a$，

$h'(t)=2(2\ln t+3)$，令 $h'(t)=0$ 得 $t=\dfrac{1}{e^{\frac{3}{2}}}$，

$h(t)$ 在 $(0,\dfrac{1}{e^{\frac{3}{2}}})$ 上单调递减，$(\dfrac{1}{e^{\frac{3}{2}}},+\infty)$ 上单调递增， ……8 分

∴$h(t)_{\min}=h(\dfrac{1}{e^{\frac{3}{2}}})=\dfrac{-4}{e^{\frac{3}{2}}}-a$.

∵ $\dfrac{-4}{e^{\frac{3}{2}}}-a<0$，$t\to 0^+$时，$h(t)\to -a<0$，$t\to+\infty$ 时，$h(t)\to+\infty$.

由零点存在定理得存在 $t_0\in(\dfrac{1}{e^{\frac{3}{2}}},+\infty)$，使得 $h(t_0)=0$，

成都教科院

$\therefore t\in(0,t_0)$ 时，$g'(t)<0$，$g(t)$ 单调递减；

$t\in(t_0,+\infty)$ 时，$g'(t)>0$，$g(t)$ 单调递增. ……9 分

由 $t\to 0^+$ 时，$g(t)\to a>0$，$t\to+\infty$ 时，$g(t)\to+\infty$，且 $g(1)=0$，

故当 $t_0=1$ 时，函数 $g(t)$ 有且仅有一个零点，不合题意；

当 $t_0\neq 1$ 时，$g(t)_{\min}=g(t_0)<g(1)=0$，

此时 $g(t)$ 在 $(0,t_0)$，$(t_0,+\infty)$ 上各有一个零点. 满足题意. ……11 分

由 $h(t)$ 在 $(\frac{1}{e^{\frac{3}{2}}},+\infty)$ 上单调递增，且 $h(1)=2-a$.

故当 $a=2$ 时，$t_0=1$，不合题意；

当 $a\in(0,2)\cup(2,+\infty)$ 时，$t_0\neq 1$，满足题意.

综上，a 的取值范围为 $(0,2)\cup(2,+\infty)$. ……12 分

22. **解**：(Ⅰ)由曲线 C 的参数方程 $\begin{cases}x=mt^2,\\ y=mt\end{cases}$ (t 为参数)，

消去参数 t 可得曲线 C 的普通方程为 $y^2=mx$. ……2 分

由直线 l 的极坐标方程得：$\frac{\sqrt{2}}{2}(\rho\cos\theta-\rho\sin\theta)-2\sqrt{2}=0$. ……3 分

$\because x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$，

$\therefore$ 直线 l 的直角坐标方程为 $x-y-4=0$. ……5 分

(Ⅱ)直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=6+\frac{\sqrt{2}}{2}t,\\ y=2+\frac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$ (t 为参数). ……6 分

与曲线 C：$y^2=mx$ 联立得：$t^2+(4\sqrt{2}-\sqrt{2}m)t+8-12m=0$，$\Delta>0$，

设 A，B 两点对应的参数分别为 t_1，t_2，则 $t_1+t_2=\sqrt{2}m-4\sqrt{2}$，$t_1t_2=8-12m$.

……7 分

$\because M$ 为线段 AB 的三等分点，$\therefore t_1=-2t_2$. ……8 分

代入 $t_1+t_2=\sqrt{2}m-4\sqrt{2}$ 可得 $t_1=2\sqrt{2}(m-4)$，$t_2=-\sqrt{2}(m-4)$.

代入 $t_1t_2=8-12m$，可得 $-4(m-4)^2=8-12m$.

即 $m^2-11m+18=0$，解得 $m=2$ 或 $m=9$ 均满足 $\Delta>0$.

故 m 的值为 2 或 9. ……10 分

23. **解**：(Ⅰ)当 $x\geqslant 2m$ 时，$x-3m\geqslant 2x$，解得 $2m\leqslant x\leqslant -3m$； ……2 分

当 $x<2m$ 时，$m-x\geqslant 2x$，$x\leqslant\frac{m}{3}$，解得 $x<2m$. ……4 分

综上，所求不等式的解集为 $\{x\mid x\leqslant -3m\}$. ……5 分

(Ⅱ)由题意，当 $m=-2$ 时，$f(x)$ 的最小值为 2. ……6 分

$\therefore a^2+b^2+c^2=2$.

$$\frac{a^2}{b^2+c^2}+\frac{b^2}{c^2+a^2}+\frac{c^2}{a^2+b^2}=\frac{2-(b^2+c^2)}{b^2+c^2}+\frac{2-(c^2+a^2)}{c^2+a^2}+\frac{2-(a^2+b^2)}{a^2+b^2}$$

$$=\frac{2}{b^2+c^2}+\frac{2}{c^2+a^2}+\frac{2}{a^2+b^2}-3$$ ……8 分

$$=\frac{[(b^2+c^2)+(c^2+a^2)+(a^2+b^2)]}{2}\left(\frac{1}{b^2+c^2}+\frac{1}{c^2+a^2}+\frac{1}{a^2+b^2}\right)-3$$

$$\geqslant\frac{1}{2}\left(\sqrt{b^2+c^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{b^2+c^2}}+\sqrt{c^2+a^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{c^2+a^2}}+\sqrt{a^2+b^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2-3=\frac{3}{2}.$$

当且仅当 $a^2=b^2=c^2=\frac{2}{3}$ 时等号成立,不等式得证. ……10 分

成都教科院