2024 年普通高等学校招生全国统一考试

全国甲卷文科数学

使用范围：陕西、宁夏、青海、内蒙古、四川

注意事项：

1．答题前，务必将自己的姓名、考籍号填写在答题卡规定的位置上．

2．答选择题时，必须使用 2B 铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑．如需改动，用橡皮擦擦干净后，再选涂其它答案标号．

3．答非选择题时，必须使用 0.5 毫米黑色签字笔，将答案书写在答题卡规定的位置上．

4．所有题目必须在答题卡上作答，在试题卷上答题无效．

5．考试结束后，只将答题卡交回．

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 集合 $A=\{1，2，3，4，5，9\}$，$B=\{x|x+1\in A\}$，则 $A\cap B=$(　　)

(A)$\{1，2，3，4\}$　　(B)$\{1，2，3，4\}$　　(C)$\{1，2，3，4\}$　　(D)$\{1，2，3，4\}$

【参考答案】A

【详细解析】因为 $A=\{1，2，3，4，5，9\}$，$B=\{x|x+1\in A\}=\{0，1，2，3，4，8\}$，所以 $A\cap B=\{1，2，3，4\}$，故选(A).

2. 设 $z=\sqrt{2}i$，则 $z\cdot\overline{z}=$(　　)

(A)2　　(B)2　　(C)2　　(D)2

【参考答案】D

【详细解析】因为 $z=\sqrt{2}i$，所以 $z\cdot\overline{z}=2$，故选(D).

3. 若实数 x，y 满足约束条件(略)，则 $z=x-5y$ 的最小值为(　　)

(A)5　　(B)$\frac{1}{2}$　　(C)-2　　(D)$-\frac{7}{2}$

【参考答案】D

【详细解析】将约束条件两两联立可得 3 个交点：$(0，-1)$、$(\frac{3}{2}，1)$和$(3，\frac{1}{2})$，经检验都符合约束条件．代入目标函数可得：$z_{\min}=-\frac{7}{2}$，故选(D).

4. 等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，若 $S_9=1$，$a_3+a_7=$(　　)

(A)-2　　(B)$\frac{7}{3}$　　(C)1　　(D)$\frac{2}{9}$

【参考答案】D

【详细解析】令 $d=0$，则 $S_9=9a_n=1$，$a_n=\frac{1}{9}$，$a_3+a_7=\frac{2}{9}$，故选(D).

5. 甲、乙、丙、丁四人排成一列，丙不在排头，且甲或乙在排尾的概率是(　　)

(A)$\frac{1}{4}$　　(B)$\frac{1}{3}$　　(C)$\frac{1}{2}$　　(D)$\frac{2}{3}$

【参考答案】B

【详细解析】甲、乙、丙、丁四人排成一列共有 24 种可能．丙不在排头，且甲或乙在排尾的共有 8 种可能，$P=\frac{8}{24}=\frac{1}{3}$，故选(B)．

6.已知双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0，b>0)$的左、右焦点分别为 $F_1(0，4)$、$F_2(0，-4)$，且经过点 $P(-6，4)$，则双曲线 C 的离心率是(　　)

(A)$\frac{13}{5}$　　(B)$\frac{13}{7}$　　(C)2　　(D)3

【参考答案】C

【详细解析】$e=\frac{c}{a}=\frac{|F_1F_2|}{|PF_2|-|PF_1|}=2$，故选(C)．

7.曲线 $f(x)=x^6+3x$ 在$(0，-1)$处的切线与坐标轴围成的面积为(　　)

(A)$\frac{1}{6}$　　(B)$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　(C)$\frac{1}{2}$　　(D)$\frac{\sqrt{3}}{2}$

【参考答案】A

【详细解析】因为 $y'=6x^5+3$，所以 $k=3$，$y=3x-1$，$S=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times1=\frac{1}{6}$，故选(A)．

8.函数 $f(x)=-x^2+(e^x-e^{-x})\sin x$ 的大致图像为(　　)

【参考答案】B

【详细解析】选(B)．

9.已知$\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\sqrt{3}$，则 $\tan(\alpha+\frac{\pi}{4})=$(　　)

(A)3　　(B)$2\sqrt{3}-1$　　(C)-3　　(D)$\frac{1}{3}$

【参考答案】B

【详细解析】因为$\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\sqrt{3}$，所以 $\tan\alpha=1-\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\tan(\alpha+\frac{\pi}{4})=\frac{\tan\alpha+1}{1-\tan\alpha}=2\sqrt{3}-1$，故选(B)．

10. 直线过圆心，直径

【参考答案】直径

【详细解析】直线过圆心，直径．

11.已知已知 m、n 是两条不同的直线，α、β是两个不同的平面：①若 $m\perp\alpha$，$n\perp\alpha$，则 $m//n$；②若$\alpha\cap\beta=m$，$m//n$，则 $n//\beta$；③若 $m//\alpha$，$n//\alpha$，m 与 n 可能异面，也可能相交，也可能平行；④若$\alpha\cap\beta=m$，n 与α和β所成的角相等，则 $m\perp n$，以上命题是真命题的是(　　)

(A)①③　　(B)②③　　(C)①②③　　(D)①③④

【参考答案】A

【详细解析】选(A)．

12.在△ABC 中，内角 A，B，C 所对边分别为 a，b，c，若 $B=\frac{\pi}{3}$，$b^2=\frac{9}{4}ac$，则 $\sin A+\sin C=$(　　)

(A)$\frac{2\sqrt{39}}{13}$　　(B)$\frac{\sqrt{39}}{13}$　　(C)$\frac{\sqrt{7}}{2}$　　(D)$\frac{3\sqrt{13}}{13}$

【参考答案】C

【详细解析】因为$B=\frac{\pi}{3}$，$b^2=\frac{9}{4}ac$，所以$\sin A\sin C=\frac{4}{9}\sin^2 B=\frac{1}{3}$．由余弦定理可得：$b^2=a^2+c^2-ac=\frac{9}{4}ac$，即：$a^2+c^2=\frac{13}{4}ac$，$\sin^2 A+\sin^2 C=\frac{13}{4}\sin A\sin C=\frac{13}{12}$，所以$(\sin A+\sin C)^2=\sin^2 A+\sin^2 C+2\sin A\sin C=\frac{7}{4}$，$\sin A+\sin C=\frac{\sqrt{7}}{2}$，故选(C)．

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13．略

14．函数$f(x)=\sin x-\sqrt{3}\cos x$在$[0，\pi]$上的最大值是________．

【参考答案】2

【详细解析】$f(x)=\sin x-\sqrt{3}\cos x=2\sin(x-\frac{\pi}{3})\leq 2$，当且仅当$x=\frac{5\pi}{6}$时取等号．

15．已知$a>1$，$\frac{1}{\log_8 a}-\frac{1}{\log_a 4}=-\frac{5}{2}$，则$a=$__________．

【参考答案】64

【详细解析】因为$\frac{1}{\log_8 a}-\frac{1}{\log_a 4}=\frac{3}{\log_2 a}-\frac{1}{2}\log_2 a=-\frac{5}{2}$，所以$(\log_2 a+1)(\log_2 a-6)=0$，而$a>1$，故$\log_2 a=6$，$a=64$．

16．曲线$y=x^3-3x$与$y=-(x-1)^2+a$在$(0，+\infty)$上有两个不同的交点，则a的取值范围为_______．

【参考答案】$(-2，1)$

【详细解析】令$x^3-3x=-(x-1)^2+a$，则$a=x^3-3x+(x-1)^2$，设$\varphi(x)=x^3-3x+(x-1)^2$，$\varphi'(x)=(3x+5)(x-1)$，$\varphi(x)$在$(1，+\infty)$上递增，在$(0，1)$上递减．因为曲线$y=x^3-3x$与$y=-(x-1)^2+a$在$(0，+\infty)$上有两个不同的交点，$\varphi(0)=1$，$\varphi(1)=-2$，所以$a$的取值范围为$(-2，1)$．

三、解答题：共 70 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤．第 17 题～第 21 题为必考题，每个考题考生必须作答．第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答．

(一)必考题：共 60 分．

17．(12 分)已知等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$2S_n=3a_{n+1}-3$．

(1)求$\{a_n\}$的通项公式；

(2)求数列$\{S_n\}$的通项公式．

【参考答案】见解析．

【详细解析】(1)因为$2S_n=3a_{n+1}-3$，所以$2S_{n+1}=3a_{n+2}-3$，两式相减可得：$2a_{n+1}=3a_{n+2}-3a_{n+1}$，即：$3a_{n+2}=5a_{n+1}$，所以等比数列$\{a_n\}$的公比$q=\frac{5}{3}$，又因为$2S_1=3a_2-3=5a_1-3$，所以$a_1=1$，$a_n=(\frac{5}{3})^{n-1}$；

(2)因为$2S_n=3a_{n+1}-3$，所以$S_n=\frac{3}{2}(a_{n+1}-1)=\frac{3}{2}[(\frac{5}{3})^n-1]$．

18．(12 分)题干略．

【参考答案】见解析．

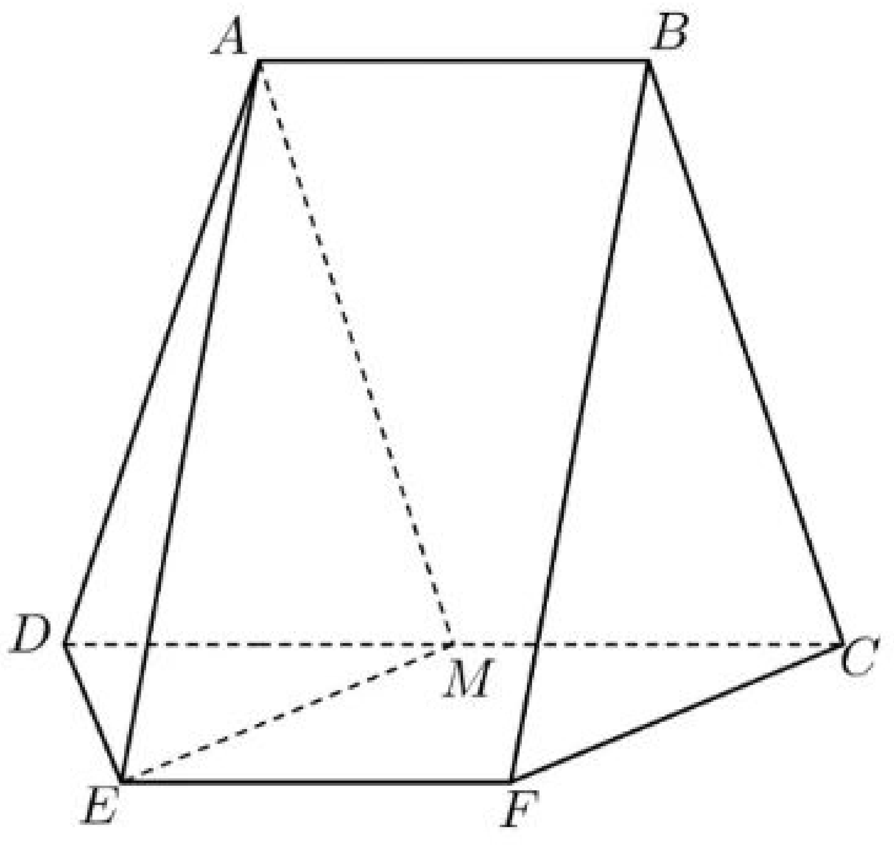
【详细解析】(1)$\chi^2=\dfrac{150(70\times24-26\times30)^2}{96\times54\times50\times100}<6.635$，没有 99%的把握；

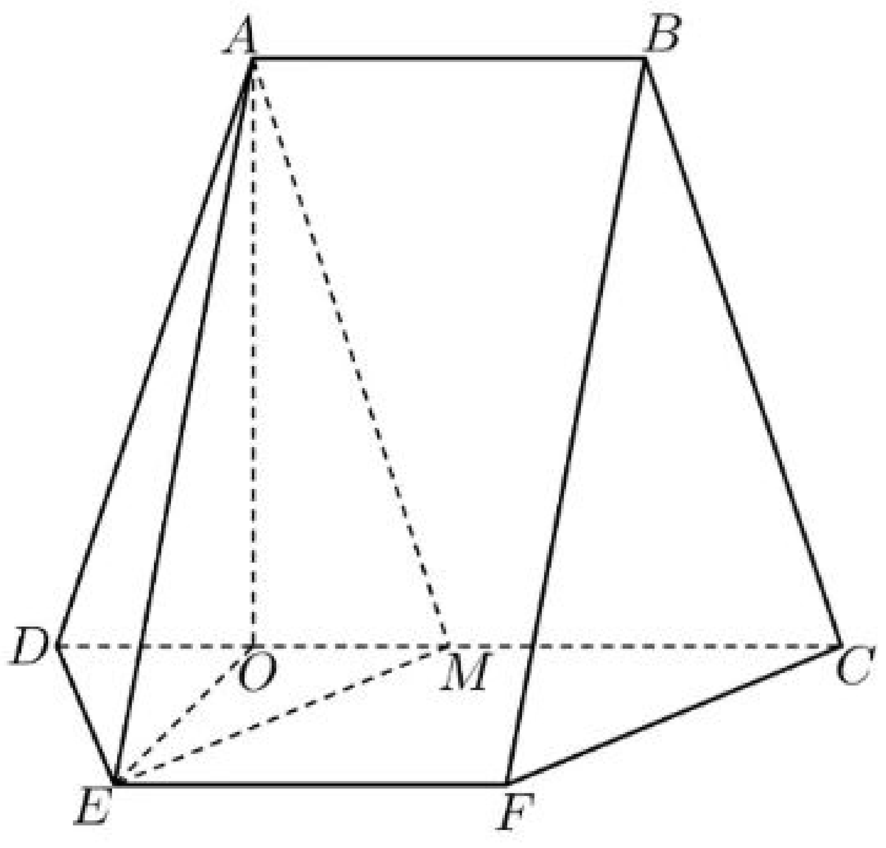
(2)$\bar{p}>p+1.65\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{150}}$，故有优化提升.

19．(12 分)如图，已知 $AB\parallel CD$，$CD\parallel EF$，$AB=DE=EF=CF=2$，$CD=4$，$AD=BC=\sqrt{10}$，$AE=2\sqrt{3}$，M 为 CD 的中点.

(1)证明：$EM\parallel$ 平面 BCF；

(2)求点 M 到 ADE 的距离.





【参考答案】见解析

【详细解析】(1)由题意：$EF\parallel CM$，$EF=CM$，而 $CF\subsetneqq$平面 ADO，$EM\nsubseteq$平面 ADO，所以 EM

$\parallel$平面 BCF；

(2)取 DM 的中点 O，连结 OA，OE，则 $OA\perp DM$，$OE\perp DM$，$OA=3$，$OE=\sqrt{3}$，而 $AE=2\sqrt{3}$，故 $OA\perp OE$，$S_{\triangle AOE}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. 因为 $DE=2$，$AD=\sqrt{10}$，所以 $AD\perp DE$，$S_{\triangle AOE}=\sqrt{10}$. DM 设点 M 到平面 ADE 的距离为 h，所以 $V_{M-ADE}=\dfrac{1}{3}S_{\triangle ADE}\cdot h=\dfrac{1}{3}S_{\triangle AOE}\cdot DM$，$h=\dfrac{4\sqrt{3}}{\sqrt{10}}=\dfrac{2\sqrt{30}}{5}$，故点 M 到 ADE 的距离为$\dfrac{2\sqrt{30}}{5}$.

20．(12 分)已知函数 $f(x)=a(x-1)-\ln x+1$.

(1)求 $f(x)$的单调区间；

(2)若 $a\leq2$ 时，证明：当 $x>1$ 时，$f(x)<e^{x-1}$恒成立.

【参考答案】见解析

【详细解析】(1)$f(x)=a(x-1)-\ln x+1$，$f'(x)=\dfrac{ax-1}{x}$，$x>0$.

若 $a\leq0$，$f'(x)<0$，$f(x)$的减区间为$(0，+\infty)$，无增区间；

若 $a>0$ 时，当 $0<x<\dfrac{1}{a}$时，$f'(x)<0$，当 $x>\dfrac{1}{a}$时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$的减区间为$(0，\dfrac{1}{a})$，增区间为$(\dfrac{1}{a}，+\infty)$；

(2)因为 $a\leq2$，所以当 $x>1$ 时，$e^{x-1}-f(x)=e^{x-1}-a(x-1)+\ln x-1\geq e^{x-1}-2x+\ln x+1$. 令 $g(x)=e^{x-1}-2x+\ln x+1$，则 $g'(x)=e^{x-1}-2+\dfrac{1}{x}$. 令 $h(x)=g'(x)$，则 $h'(x)=e^{x-1}-\dfrac{1}{x^2}$在$(1，+\infty)$上递增，$h'(x)>h'(1)=0$，所以 $h(x)=g'(x)$在$(1，+\infty)$上递增，$g'(x)>g'(1)=0$，故 $g(x)$在$(1，+\infty)$上递增，$g(x)>g(1)=0$，即：当 $x>1$ 时，$f(x)<e^{x-1}$恒成立.

21．(12 分)已知椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的右焦点为 F，点 $M(1，\dfrac{3}{2})$在椭圆 C 上，且 $MF\perp x$ 轴.

(1)求椭圆 C 的方程；

(2)$P(4,0)$，过 P 的直线与椭圆 C 交于 A， B 两点，N 为 FP 的中点，直线 NB 与 MF 交于 Q，证明：$AQ\perp y$ 轴.

【参考答案】见解析

【详细解析】(1)设椭圆 C 的左焦点为 F_1，则 $|F_1F|=2$，$|MF|=\frac{3}{2}$. 因为 $MF\perp x$ 轴，所以 $|MF_1|=\frac{5}{2}$，$2a=|MF_1|+|MF|=4$，解得：$a^2=4$，$b^2=a^2-1=3$，故椭圆 C 的方程为：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$；

(2)解法 1：设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{PB}$，则 $\begin{cases}\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}=4\\ \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}\lambda x_2=4+4\lambda-x_1\\ \lambda y_2=-y_1\end{cases}$. 又由 $\begin{cases}3x_1^2+4y_1^2=12\\ 3(\lambda x_2)^2+4(\lambda y_2)^2=12\lambda^2\end{cases}$ 可得：$3\cdot\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}\cdot\frac{x_1-\lambda x_2}{1-\lambda}+4\cdot\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\cdot\frac{y_1-\lambda y_2}{1-\lambda}=12$，结合上式可得：$5\lambda-2\lambda x_2+3=0$. $P(4,0)$，$F(1,0)$，$N(\frac{5}{2},0)$，则 $y_Q=\frac{3y_2}{5-2x_2}=\frac{3\lambda y_2}{5\lambda-2\lambda x_2}=-\lambda y_2=y_1$，故 $AQ\perp y$ 轴.

解法 2：设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，，则 $\frac{y_1}{x_1-4}=\frac{y_2}{x_2-4}$，即：$x_1y_2-x_2y_1=4(y_2-y_1)$，所以 $(x_1y_2-x_2y_1)(x_1y_2+x_2y_1)=x_1^2y_2^2-x_2^2y_1^2=(4+\frac{4y_1^2}{3})y_2^2-(4+\frac{4y_2^2}{3})y_1^2=4(y_2-y_1)(y_2+y_1)=4(y_2-y_1)(x_1y_2+x_2y_1)$，即：$x_1y_2+x_2y_1=y_2+y_1$，$2x_2y_1=5y_1-3y_2$. $P(4,0)$，$F(1,0)$，$N(\frac{5}{2},0)$，则 $y_Q=\frac{3y_2}{5-2x_2}=\frac{3y_1y_2}{5y_1-2y_1x_2}=y_1$，故 $AQ\perp y$ 轴.

(二)选考题：共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答，并用 2B 铅笔将所选题号涂黑，多涂、错涂、漏涂均不给分，如果多做，则按所做的第一题计分.

22．[选修 4－4：坐标系与参数方程](10 分) 在平面直角坐标系 xOy 中，以坐标原点 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C 的极坐标方程为 $\rho=\rho\cos\theta+1$.

(1)写出 C 的直角坐标方程；

(2)直线 $\begin{cases}x=t\\ y=t+a\end{cases}$ (t 为参数)与曲线 C 交于 A、B 两点，若 $|AB|=2$，求 a 的值.

【参考答案】见解析

【详细解析】(1)因为 $\rho=\rho\cos\theta+1$，所以 $\rho^2=(\rho\cos\theta+1)^2$，故 C 的直角坐标方程为：$x^2+y^2=(x+1)^2$，即：$y^2=2x+1$；

(2)将 $\begin{cases}x=t\\ y=t+a\end{cases}$ 代入 $y^2=2x+1$ 可得：$t^2+2(a-1)t+a^2-1=0$，$|AB|=\sqrt{2}|t_1-t_2|=\sqrt{16(1-a)}=2$，解得：$a=\frac{3}{4}$.

23．[选修 4－5：不等式选讲](10 分)(微信公众号：yxwlsgzs)实数 a，b 满足 $a+b\geqslant 3$.

(1)证明：$2a^2+2b^2>a+b$；

(2)证明：$|a-2b^2|+|b-2a^2|\geqslant 6$.

【解析】(1)因为 $a+b\geqslant 3$，所以 $2a^2+2b^2\geqslant(a+b)^2>a+b$；

(2)$|a-2b^2|+|b-2a^2|\geqslant|a-2b^2+b-2a^2|=|2a^2+2b^2-(a+b)|=2a^2+2b^2-(a+b)\geqslant(a+b)^2-(a+b)=(a+b)(a+b-1)\geqslant 6$.