

2024 年普通高等学校招生全国统一考试

理 科 数 学

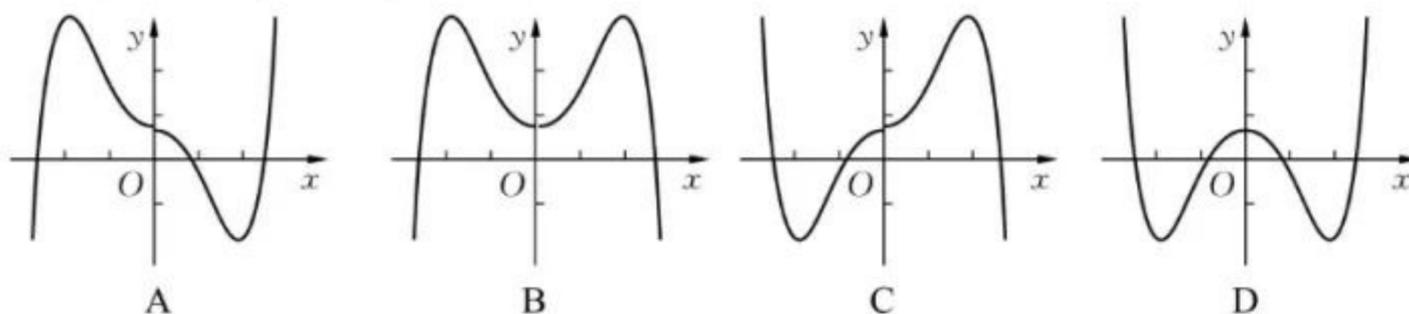
注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号。回答非选择题时, 将答案写在答题卡上, 写在本试卷上无效。
3. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 若 $z = 5 + i$, 则 $i(\bar{z} + z) =$
A. $10i$ B. $2i$ C. 10 D. 2
2. 已知集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 9\}$, $B = \{x \mid \sqrt{x} \in A\}$, 则 $\complement_A(A \cap B) =$
A. $\{1, 4, 9\}$ B. $\{3, 4, 9\}$ C. $\{1, 2, 3\}$ D. $\{2, 3, 5\}$
3. 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} 4x - 3y - 3 \geq 0, \\ x - 2y - 2 \leq 0, \\ 2x + 6y - 9 \leq 0, \end{cases}$ 则 $z = x - 5y$ 的最小值为
A. $\frac{1}{2}$ B. 0 C. $-\frac{5}{2}$ D. $-\frac{7}{2}$
4. 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 已知 $S_5 = S_{10}$, $a_5 = 1$, 则 $a_1 =$
A. $\frac{7}{2}$ B. $\frac{7}{3}$ C. $-\frac{1}{3}$ D. $-\frac{7}{11}$
5. 已知双曲线的两个焦点分别为 $(0, 4), (0, -4)$, 点 $(-6, 4)$ 在该双曲线上, 则该双曲线的离心率为
A. 4 B. 3 C. 2 D. $\sqrt{2}$
6. 设函数 $f(x) = \frac{e^x + 2\sin x}{1 + x^2}$, 则曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, 1)$ 处的切线与两坐标轴所围成的三角形的面积为
A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{2}{3}$

7. 函数 $y = -x^2 + (e^x - e^{-x})\sin x$ 在区间 $[-2.8, 2.8]$ 的图象大致为



8. 已知 $\frac{\cos \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} = \sqrt{3}$, 则 $\tan(\alpha + \frac{\pi}{4}) =$

- A. $2\sqrt{3} + 1$ B. $2\sqrt{3} - 1$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $1 - \sqrt{3}$

9. 设向量 $a = (x+1, x), b = (x, 2)$, 则

- A. $x = -3$ 是 $a \perp b$ 的必要条件 B. $x = -3$ 是 $a \parallel b$ 的必要条件
C. $x = 0$ 是 $a \perp b$ 的充分条件 D. $x = -1 + \sqrt{3}$ 是 $a \parallel b$ 的充分条件

10. 设 α, β 为两个平面, m, n 为两条直线, 且 $\alpha \cap \beta = m$. 下述四个命题:

- ① 若 $m \parallel n$, 则 $n \parallel \alpha$ 或 $n \parallel \beta$
② 若 $m \perp n$, 则 $n \perp \alpha$ 或 $n \perp \beta$
③ 若 $n \parallel \alpha$ 且 $n \parallel \beta$, 则 $m \parallel n$
④ 若 n 与 α, β 所成的角相等, 则 $m \perp n$

其中所有真命题的编号是

- A. ①③ B. ②④ C. ①②③ D. ①③④

11. 记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $B = 60^\circ, b^2 = \frac{9}{4}ac$, 则 $\sin A + \sin C =$

- A. $\frac{3}{2}$ B. $\sqrt{2}$ C. $\frac{\sqrt{7}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

12. 已知 b 是 a, c 的等差中项, 直线 $ax + by + c = 0$ 与圆 $x^2 + y^2 + 4y - 1 = 0$ 交于 A, B 两点, 则 $|AB|$ 的最小值为

- A. 1 B. 2 C. 4 D. $2\sqrt{5}$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. $(\frac{1}{3} + x)^{10}$ 的展开式中, 各项系数中的最大值为 _____.

14. 已知圆台甲、乙的上底面半径均为 r_1 , 下底面半径均为 r_2 , 圆台的母线长分别为 $2(r_2 - r_1)$, $3(r_2 - r_1)$, 则圆台甲与乙的体积之比为 _____.

15. 已知 $a > 1$ 且 $\frac{1}{\log_8 a} - \frac{1}{\log_a 4} = -\frac{5}{2}$, 则 $a =$ _____.

16. 有 6 个相同的球, 分别标有数字 1, 2, 3, 4, 5, 6, 从中无放回地随机取 3 次, 每次取 1 个球. 设 m 为前两次取出的球上数字的平均值, n 为取出的三个球上数字的平均值, 则 m 与 n 之差的绝对值不大于 $\frac{1}{2}$ 的概率为 _____.

三、解答题: 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17—21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题, 考生根据要求作答。

(一) 必考题: 共 60 分。

17. (12 分)

某工厂进行生产线智能化升级改造. 升级改造后, 从该工厂甲、乙两个车间的产品中随机抽取 150 件进行检验, 数据如下:

	优级品	合格品	不合格品	总计
甲车间	26	24	0	50
乙车间	70	28	2	100
总计	96	52	2	150

(1) 填写如下列联表:

	优级品	非优级品
甲车间		
乙车间		

能否有 95% 的把握认为甲、乙两车间产品的优级品率存在差异? 能否有 99% 的把握认为甲、乙两车间产品的优级品率存在差异?

(2) 已知升级改造前该工厂产品的优级品率 $p = 0.5$. 设 \bar{p} 为升级改造后抽取的 n 件产品的优级品率. 如果 $\bar{p} > p + 1.65\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$, 则认为该工厂产品的优级品率提高了. 根据抽取的 150 件产品的数据, 能否认为生产线智能化升级改造后, 该工厂产品的优级品率提高了?

($\sqrt{150} \approx 12.247$)

$$\text{附: } K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}, \quad \begin{array}{c} P(K^2 \geq k) \\ k \end{array} \quad \begin{array}{c} 0.050 \\ 3.841 \end{array} \quad \begin{array}{c} 0.010 \\ 6.635 \end{array} \quad \begin{array}{c} 0.001 \\ 10.828 \end{array}$$

18. (12分)

记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 已知 $4S_n = 3a_n + 4$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $b_n = (-1)^{n-1}na_n$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

19. (12分)

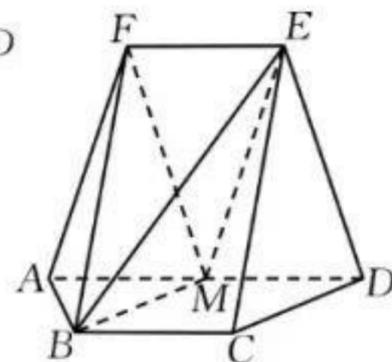
如图, 在以 A, B, C, D, E, F 为顶点的五面体中, 四边形

$ABCD$ 与四边形 $ADEF$ 均为等腰梯形, $EF \parallel AD, BC \parallel AD$, AD

$= 4, AB = BC = EF = 2, ED = \sqrt{10}, FB = 2\sqrt{3}, M$ 为 AD 的中点.

(1) 证明: $BM \parallel$ 平面 CDE ;

(2) 求二面角 $F - BM - E$ 的正弦值.



20. (12分)

设椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点为 F , 点 $M(1, \frac{3}{2})$ 在 C 上, 且 $MF \perp x$ 轴.

(1) 求 C 的方程;

(2) 过点 $P(4, 0)$ 的直线交 C 于 A, B 两点, N 为线段 FP 的中点, 直线 NB 交直线 MF 于点

Q . 证明: $AQ \perp y$ 轴.

21. (12分)

已知函数 $f(x) = (1-ax)\ln(1+x) - x$.

(1) 若 $a = -2$, 求 $f(x)$ 的极值;

(2) 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) \geq 0$, 求 a 的极值范围.

(二) 选考题: 共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做, 则按所做的第一题计分。

22. [选修 4-4: 坐标系与参数方程] (10分)

在直角坐标系 xOy 中, 以坐标原点为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C 的极坐标方程为 $\rho = \rho \cos \theta + 1$.

(1) 写出 C 的直角坐标方程;

(2) 设直线 $l: \begin{cases} x=t, \\ y=t+a \end{cases}$ (t 为参数), 若 C 与 l 相交于 A, B 两点, 且 $|AB| = 2$, 求 a .

23. [选修 4-5: 不等式选讲] (10分)

已知实数 a, b 满足 $a + b \geq 3$.

(1) 证明: $2a^2 + 2b^2 > a + b$;

(2) 证明: $|a - 2b^2| + |b - 2a^2| \geq 6$.