2024 年普通高等学校招生全国统一考试
全国甲卷理科数学

使用范围：陕西、宁夏、青海、内蒙古、四川

注意事项：

1．答题前，务必将自己的姓名、考籍号填写在答题卡规定的位置上．

2．答选择题时，必须使用 2B 铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑．如需改动，用橡皮擦擦干净后，再选涂其它答案标号．

3．答非选择题时，必须使用 0.5 毫米黑色签字笔，将答案书写在答题卡规定的位置上．

4．所有题目必须在答题卡上作答，在试题卷上答题无效．

5．考试结束后，只将答题卡交回．

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1.设 $z=5+\mathrm{i}$，则 $\mathrm{i}(\overline{z}+z)=(\quad)$

(A)10i　　(B)2i　　(C)10　　(D)-2

【参考答案】A

【详细解析】因为 $z=5+\mathrm{i}$，所以 $\mathrm{i}(\overline{z}+z)=10\mathrm{i}$，故选(A).

2.集合 $A=\{1,2,3,4,5,9\}$，$B=\{x|\sqrt{x}\in A\}$，则$\complement_A(A\cap B)=(\quad)$

(A)$\{1,4,9\}$　　(B)$\{3,4,9\}$　　(C)$\{1,2,3\}$　　(D)$\{2,3,5\}$

【参考答案】D

【详细解析】因为 $A=\{1,2,3,4,5,9\}$，$B=\{x|\sqrt{x}\in A\}=\{1,4,9,16,25,81\}$，所以 $\complement_A(A\cap B)=\{2,3,5\}$，故选(D).

3.若实数 x，y 满足约束条件$\begin{cases}4x-3y-3\geqslant 0,\\ x-2y-2\leqslant 0,\\ 2x+6y-9\leqslant 0,\end{cases}$ 则 $z=x-5y$ 的最小值为(　　)

(A)$\frac{1}{2}$　　(B) 0　　(C)$-\frac{5}{2}$　　(D)$-\frac{7}{2}$

【参考答案】D

【详细解析】将约束条件两两联立可得 3 个交点：$(0,-1)$、$(\frac{3}{2},1)$和$(3,\frac{1}{2})$，经检验都符合约束条件．代入目标函数可得：$z_{\min}=-\frac{7}{2}$，故选(D).

4.等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，若 $S_5=S_{10}$，$a_5=1$，则 $a_1=(\quad)$

(A)-2　　(B)$\frac{7}{3}$　　(C)1　　(D)2

【参考答案】B

【详细解析】因为 $S_5=S_{10}$，所以 $S_7=S_{18}$，$a_8=0$，又因为 $a_5=1$，所以公差 $d=-\frac{1}{3}$，$a_1=a_8-7d=\frac{7}{3}$，故选(B).

5.已知双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点分别为 $F_1(0,$

(A)$\frac{13}{5}$　　(B)$\frac{13}{7}$　　(C)2　　(D)3

【参考答案】C

【详细解析】$e=\frac{c}{a}=\frac{|F_1F_2|}{|PF_2|-|PF_1|}=2$，故选(C).

6.曲线 $f(x)=x^6+3x$ 在$(0,-1)$处的切线与坐标轴围成的面积为(　　)

(A)$\frac{1}{6}$　　(B)$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　(C)$\frac{1}{2}$　　(D)$\frac{\sqrt{3}}{2}$

【参考答案】A

【详细解析】因为 $y'=6x^5+3$，所以 $k=3$，$y=3x-1$，$S=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times1=\frac{1}{6}$，故选(A).

7.函数 $f(x)=-x^2+(e^x-e^{-x})\sin x$ 的大致图像为(　　)

【参考答案】B

【详细解析】选(B).

8.已知$\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\sqrt{3}$，则 $\tan(\alpha+\frac{\pi}{4})=$(　　)

(A)3　　(B)$2\sqrt{3}-1$　　(C)-3　　(D)$\frac{1}{3}$

【参考答案】B

【详细解析】因为$\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\sqrt{3}$，所以 $\tan\alpha=1-\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\tan(\alpha+\frac{\pi}{4})=\frac{\tan\alpha+1}{1-\tan\alpha}=2\sqrt{3}-1$，故选(B).

9.已知向量 $\boldsymbol{a}=(x+1,x)$，$\boldsymbol{b}=(x,2)$，则(　　)

(A)“$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$”的必要条件是“$x=-3$”　　(B)“$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$”的必要条件是“$x=-3$”

(C)“$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$”的充分条件是“$x=0$”　　(D)“$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$”的充分条件是“$x=0$”

【参考答案】C

【详细解析】$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则 $x(x+1)+2x=0$，解得：$x=0$ 或 -3，故选(C).

10.已知已知 m、n 是两条不同的直线，α、β是两个不同的平面：①若 $m\perp\alpha$，$n\perp\alpha$，则 $m/\!/n$；②若$\alpha\cap\beta=m$，$m/\!/n$，则 $n/\!/\beta$；③若 $m/\!/\alpha$，$n/\!/\alpha$，m 与 n 可能异面，也可能相交，也可能平行；④若$\alpha\cap\beta=m$，n 与α和β所成的角相等，则 $m\perp n$，以上命题是真命题的是(　　)

(A)①③　　(B)②③　　(C)①②③　　(D)①③④

【参考答案】A

【详细解析】选(A).

11.在$\triangle ABC$ 中，内角 A，B，C 所对边分别为 a，b，c，若 $B=\frac{\pi}{3}$，$b^2=\frac{9}{4}ac$，则 $\sin A+\sin C=$(　　)

(A)$\frac{2\sqrt{39}}{13}$　　(B)$\frac{\sqrt{39}}{13}$　　(C)$\frac{\sqrt{7}}{2}$　　(D)$\frac{3\sqrt{13}}{13}$

【参考答案】C

【详细解析】因为 $B=\frac{\pi}{3}$，$b^2=\frac{9}{4}ac$，所以 $\sin A\sin C=\frac{4}{9}\sin^2B=\frac{1}{3}$. 由余弦定理可得：$b^2=a^2+c^2$

$-ac=\frac{9}{4}ac$，即：$a^2+c^2=\frac{13}{4}ac$，$\sin^2A+\sin^2C=\frac{13}{4}\sin A\sin C=\frac{13}{12}$，所以$(\sin A+\sin C)^2=\sin^2A+\sin^2C+2\sin A\sin C=\frac{7}{4}$，$\sin A+\sin C=\frac{\sqrt{7}}{2}$，故选(C).

12.已知 a，b，c 成等差数列，直线 $ax+by+c=0$ 与圆 C：$x^2+(y+2)^2=5$ 交于 A，B 两点，则$|AB|$的最小值为(　　)

(A)2　　(B)3　　(C)4　　(D)6

【参考答案】C

【详细解析】因为 a，b，c 成等差数列，所以 $a-2b+c=0$，直线 $ax+by+c=0$ 恒过 $P(1,-2)$，当 $PC\perp AB$ 时，$|AB|$取得最小值，此时$|PC|=1$，$|AB|=2\sqrt{5-|PC|^2}=4$，故选(C).

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13.二项式$(\frac{1}{3}+x)^{10}$的展开式中系数的最大值是________.

【参考答案】5

【详细解析】展开式中系数最大的项一定在下面的 5 项：$C_{10}^{5}(\frac{1}{3})^5$、$C_{10}^{6}(\frac{1}{3})^4$、$C_{10}^{7}(\frac{1}{3})^3$、$C_{10}^{8}(\frac{1}{3})^2$、$C_{10}^{9}(\frac{1}{3})^1$，计算可得：系数的最大值为 $C_{10}^{8}(\frac{1}{3})^2=5$.

14.甲、乙两个圆台上下底面的半径均为 r_2 和 r_1，母线长分别为 $2(r_1-r_2)$和 $3(r_1-r_2)$，则两个圆台的体积之比$\frac{V_{甲}}{V_{乙}}=$_________.

【参考答案】$\frac{\sqrt{6}}{4}$

【详细解析】$\frac{V_{甲}}{V_{乙}}=\frac{h_{甲}}{h_{乙}}=\frac{\sqrt{3}(r_1-r_2)}{2\sqrt{2}(r_1-r_2)}=\frac{\sqrt{6}}{4}$.

15.已知 $a>1$，$\frac{1}{\log_8 a}-\frac{1}{\log_a 4}=-\frac{5}{2}$，则 $a=$__________.

【参考答案】64

【详细解析】因为$\frac{1}{\log_8 a}-\frac{1}{\log_a 4}=\frac{3}{\log_2 a}-\frac{1}{2}\log_2 a=-\frac{5}{2}$，所以$(\log_2 a+1)(\log_2 a-6)=0$，而 $a>1$，故 $\log_2 a=6$，$a=64$.

16.编号为 1、2、3、4、5、6 的六个小球，不放回的抽取三次，记 m 表示前两个球号码的平均数，记 n 表示前三个球号码的平均数，则 m 与 n 差的绝对值不超过 0.5 的概率是_______.

【参考答案】$\frac{7}{15}$

【详细解析】记前三个球的号码分别为 a、b、c，则共有 $A_6^3=120$ 种可能．令$|m-n|=|\frac{a+b}{2}-\frac{a+b+c}{3}|=|\frac{a+b-2c}{6}|\leqslant 0.5$ 可得：$|a+b-2c|\leqslant 3$，根据对称性：$c=1$ 或 6 时，均有 2 种可能；$c=2$ 或 5 时，均有 10 种可能；$c=3$ 或 4 时，均有 16 种可能；故满足条件的共有 56 种可能，$P=\frac{56}{120}=\frac{7}{15}$.

三、解答题：共 70 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤．第 17 题～第 21 题为必考题，每个考题考生必须作答．第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答.

(一)必考题：共 60 分.

17．(12 分)题干略.

【参考答案】见解析.

【详细解析】(1)$\chi^2=\dfrac{150(70\times24-26\times30)^2}{96\times54\times50\times100}<6.635$，没有 99%的把握；

(2)$\overline{p}>p+1.65\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{150}}$，故有优化提升.

18．(12 分)已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，且 $4S_n=3a_n+4$.

(1)求$\{a_n\}$的通项公式；

(2)设 $b_n=(-1)^{n-1}na_n$，求数列$\{b_n\}$的前 n 项和为 T_n.

【参考答案】见解析.

【详细解析】(1)因为 $4S_n=3a_n+4$，所以 $4S_{n+1}=3a_{n+1}+4$，两式相减可得：$4a_{n+1}=3a_{n+1}-3a_n$，即：$a_{n+1}=-3a_n$，又因为 $4S_1=3a_1+4$，所以 $a_1=4$，故数列$\{a_n\}$是首项为 4，公比为-3 的等比数列，$a_n=4\bullet(-3)^{n-1}$；

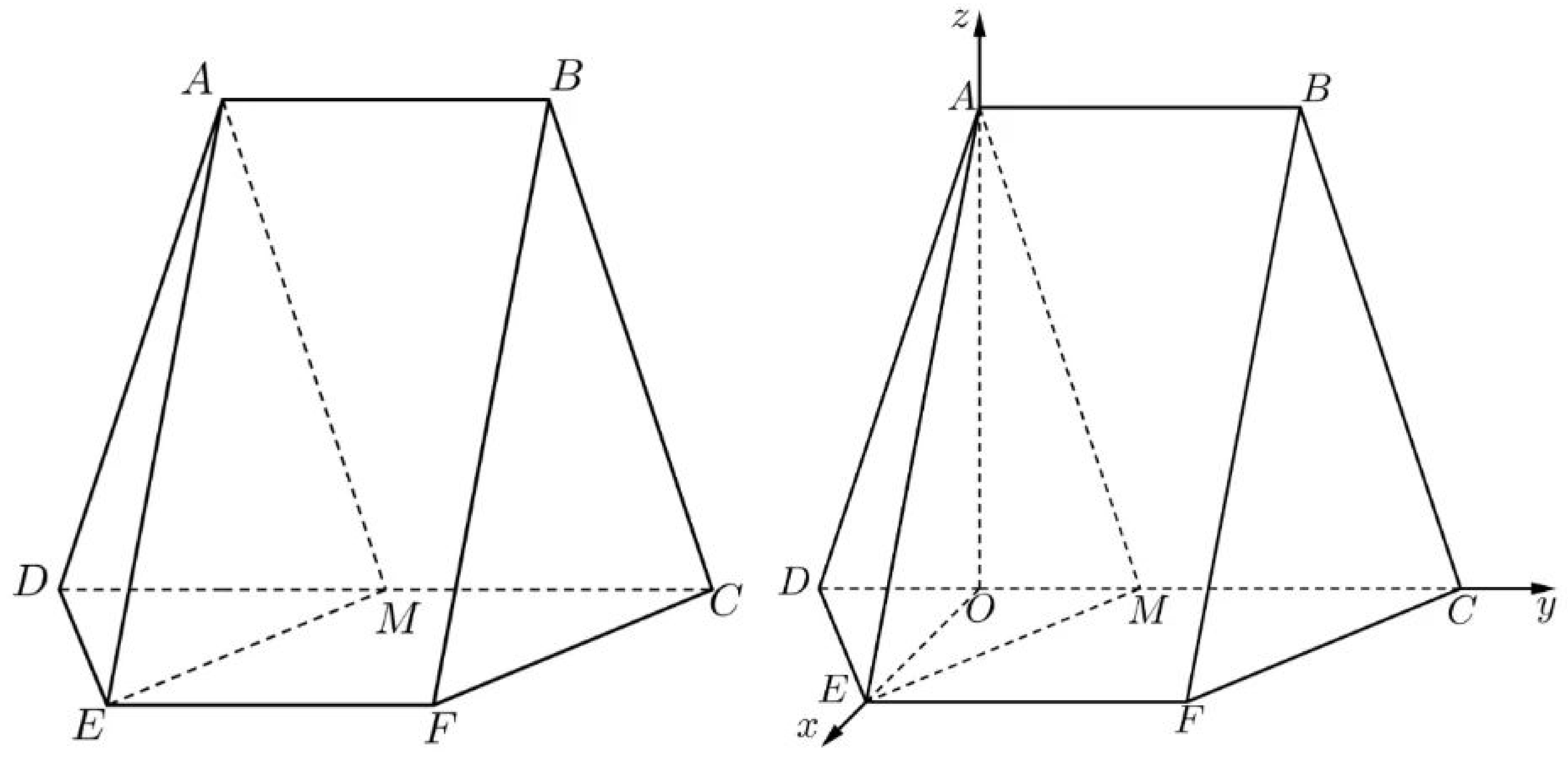
(2)$b_n=(-1)^{n-1}na_n=4n\bullet3^{n-1}$，所以 $T_n=4(1\bullet3^0+2\bullet3^1+3\bullet3^2+\cdots+n\bullet3^{n-1})$，$3T_n=4(1\bullet3^1+2\bullet3^2+3\bullet3^3+\cdots+n\bullet3^n)$，两式相减可得：$-2T_n=4(1+3^1+3^2+\cdots+3^{n-1}-n\bullet3^n)=4(\dfrac{1-3^n}{1-3}-n\bullet3^n)=(2-4n)3^n-2$，$T_n=(2n-1)3^n+1$.

解法 2：$b_n=(-1)^{n-1}na_n=4n\bullet3^{n-1}$，所以 $T_n=T_{n-1}+4n\bullet3^{n-1}$，两边同时减去$(2n-1)3^n$ 可得：$T_n-(2n-1)3^n=T_{n-1}-(2n-3)3^{n-1}$，故$\{T_n-(2n-1)3^n\}$为常数列，即：$T_n-(2n-1)3^n=1$，$T_n=(2n-1)3^n+1$.

19．(12 分)如图，已知 $AB\,/\!/\,CD$，$CD\,/\!/\,EF$，$AB=DE=EF=CF=2$，$CD=4$，$AD=BC=\sqrt{10}$，$AE=2\sqrt{3}$，M 为 CD 的中点.

(1)证明：$EM\,/\!/$ 平面 BCF；

(2)求二面角 $A-EM-B$ 的正弦值.



【参考答案】见解析

【详细解析】(1)由题意：$EF\,/\!/\,CM$，$EF=CM$，而 $CF\subsetneqq$平面 ADO，$EM\not\subset$平面 ADO，所以 $EM\,/\!/$ 平面 BCF；

(2)取 DM 的中点 O，连结 OA，OE，则 $OA\perp DM$，$OE\perp DM$，$OA=3$，$OE=\sqrt{3}$，而 $AE=2\sqrt{3}$，故 $OA\perp OE$．以 O 为坐标原点建立如图所示的空间直角坐标系，则 $A(0,0,3)$，$E(\sqrt{3},0, 0)，$M(0,1,0)$，$B(0,2,3)$，$\overrightarrow{AE}=(\sqrt{3},0,-3)$，$\overrightarrow{EM}=(-\sqrt{3},1,0)$，$\overrightarrow{MB}=(0,1,3)$，

设平面 AEM 的法向量为$\vec{n}=(x,y,z)$，由$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AE}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{EM}=0\end{cases}$可得：$\begin{cases}\sqrt{3}x-3z=0\\ -\sqrt{3}x+y=0\end{cases}$，令 $z=1$，则$\vec{n}=(\sqrt{3},3,1)$，同理：取平面 BEM 的法向量为$\vec{m}=(\sqrt{3},3,-1)$，则 $\cos<\vec{m},\vec{n}>=\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}=\dfrac{11}{13}$，$\sin<\vec{m},\vec{n}>=\dfrac{4\sqrt{3}}{13}$，故二面角 $A-EM-B$ 的正弦值为$\dfrac{4\sqrt{3}}{13}$.

20．(12 分)已知函数 $f(x)=(1-ax)\ln(1+x)-x$.

(1)当 $a=-2$ 时，求 $f(x)$的极值；

(2)当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)\geqslant 0$，求 a 的取值范围.

【参考答案】见解析

【详细解析】(1)当 $a=-2$ 时，$f(x)=(1+2x)\ln(1+x)-x$，$x>-1$．$f'(x)=2\ln(1+x)+\dfrac{x}{1+x}$，当 $x>0$ 时，$f'(x)>0$，当 $-1<x<0$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$在$(-1,0)$上递减，在$(0,+\infty)$上递增，故 $f(x)$的极小值为 $f(0)=0$，无极大值；

(2)$f(x)=(1-ax)\ln(1+x)-x$，$f'(x)=-a\ln(1+x)-\dfrac{(a+1)x}{1+x}$．令 $g(x)=f'(x)$，则 $g'(x)=-\dfrac{a}{1+x}-\dfrac{a+1}{(1+x)^2}$．因为当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)\geqslant 0$，且 $f(0)=0$，$f'(0)=0$，所以 $g'(0)=-1-2a\geqslant 0$，$a\leqslant -\dfrac{1}{2}$.

当 $a\leqslant -\dfrac{1}{2}$时，$g'(x)\geqslant \dfrac{1}{2(1+x)}-\dfrac{1}{2(1+x)^2}=\dfrac{x}{2(1+x)^2}\geqslant 0$，$g(x)$在$[0,+\infty)$上递增，$g(x)=f'(x)\geqslant g(0)=0$，故 $f(x)$在$[0,+\infty)$上递增，$f(x)\geqslant f(0)=0$ 恒成立，即 a 的取值范围为$(-\infty,-\dfrac{1}{2}]$.

21．(12 分)已知椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的右焦点为 F，点 $M(1,\dfrac{3}{2})$在椭圆 C 上，且 $MF\perp x$ 轴.

(1)求椭圆 C 的方程；

(2)$P(4,0)$，过 P 的直线与椭圆 C 交于 A，B 两点，N 为 FP 的中点，直线 NB 与 MF 交于 Q，证明：$AQ\perp y$ 轴.

【参考答案】见解析

【详细解析】(1)设椭圆 C 的左焦点为 F_1，则$|F_1F|=2$，$|MF|=\dfrac{3}{2}$．因为 $MF\perp x$ 轴，所以$|MF_1|=\dfrac{5}{2}$，$2a=|MF_1|+|MF|=4$，解得：$a^2=4$，$b^2=a^2-1=3$，故椭圆 C 的方程为：$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$；

(2)解法 1：设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{PB}$，则$\begin{cases}\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}=4\\ \dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}=0\end{cases}$，即$\begin{cases}\lambda x_2=4+4\lambda-x_1\\ \lambda y_2=-y_1\end{cases}$．又由