

绵阳市高 2022 级第一次诊断考试

数学参考答案和评分标准

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.

1. B 2. A 3. D 4. D 5. C 6. B 7. C 8. A

二、选择题：本大题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分，选对但不全的得部分分，有选错的得 0 分.

9. AB 10. ABD 11. BCD

三、填空题：本题共 3 个小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. $\sqrt{5}$; 13. -8; 14. $(-\infty, -\bullet^2)$

四、解答题：本题共 5 小题，第 15 题 13 分，第 16、17 小题 15 分，第 18、19 小题 17 分，共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. 解：（1）

	有报考意向	无报考意向	合计
男学生	100	400	500
女学生	100	300	400
合计	200	700	900

..... 2 分

男学生有报考意向的概率 $P_1 = \frac{100}{500} = \frac{1}{5}$, 4 分

女学生有报考意向的概率 $P_2 = \frac{100}{400} = \frac{1}{4}$; 6 分

（2）零假设为 H_0 ：有报考军事类院校意向与性别独立，

$$\begin{aligned} \therefore \chi^2 &= \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)} \\ &= \frac{900(100 \times 300 - 100 \times 400)^2}{500 \times 400 \times 200 \times 700} = \frac{45}{14} \approx 3.21 > 2.706, \quad \dots\dots\dots 9 \text{ 分} \end{aligned}$$

根据小概率值 $\alpha=0.1$ 的独立性检验,我们推断 H_0 不成立,即认为报考军事类院校与性别有关联,此推断犯错误的概率不大于0.1,故能认为报考军事类院校意愿与性别有关. 13分

16. 解: (1) $\because a\cos C + c\cos A = 1$, 由余弦定理可得:

$$a \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} + c \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = 1, \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\therefore \frac{2b^2}{2b} = 1, \text{ 则 } b=1, \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\text{又 } a\sin C = \frac{1}{2},$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{4}; \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$(2) \because b=1, B = \frac{\pi}{4},$$

$$\text{在 } \triangle ABC \text{ 中, 由正弦定理: } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}, \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\therefore a = \sqrt{2}\sin A, \text{ 又 } \because a\sin C = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \sqrt{2}\sin A\sin C = \frac{1}{2}, \text{ 则 } \sin A\sin(A + \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{4}, \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\therefore 2\sin^2 A + 2\sin A\cos A = 1, \text{ 则 } \sin 2A = \cos 2A, \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

$$\therefore \tan 2A = 1, \text{ 又 } \because A \text{ 是三角形内角,}$$

$$\therefore 2A = \frac{\pi}{4} \text{ 或 } \frac{5\pi}{4}, \dots\dots\dots 14 \text{ 分}$$

$$\therefore A = \frac{\pi}{8} \text{ 或 } \frac{5\pi}{8}. \dots\dots\dots 15 \text{ 分}$$

17. 解: (1) 由已知可得, $2a_1 = b_1, 3a_2 = 2b_2, a_2^2 = b_1b_2$, 则 $a_2 = 3a_1, \dots\dots 2 \text{ 分}$

$$\therefore a_1 = \frac{b_1}{2}, a_2 = \frac{3b_1}{2},$$

$$\therefore a_1 + a_2 = 2b_1, \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\text{又 } \because a_1 + a_2 = 4,$$

$\therefore b_1 = 2$; 4 分

$$(2) (i) \text{ 由题意得 } \begin{cases} (n+1)a_n = nb_n \\ (n+2)a_{n+1} = (n+1)b_{n+1} \end{cases}, \text{ 得 } a_{n+1}^2 = \left(\frac{n+1}{n}a_n\right) \times \left(\frac{n+2}{n+1}a_{n+1}\right),$$

$$a_{n+1}^2 = b_n \cdot b_{n+1}$$

..... 6 分

$$\therefore \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+2}{n}, \text{ 7 分}$$

$$\therefore \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot \frac{a_{n-2}}{a_{n-3}} \cdots \frac{a_3}{a_2} \cdot \frac{a_2}{a_1} = \frac{n+1}{n-1} \cdot \frac{n}{n-2} \cdot \frac{n-1}{n-3} \cdots \frac{5}{3} \cdot \frac{4}{2} \cdot \frac{3}{1} (n \geq 2), \text{ 8 分}$$

$$\therefore \frac{a_n}{a_1} = \frac{n(n+1)}{2}, \text{ 则 } a_n = n(n+1) (n \in \mathbb{N}^*),$$

$$\therefore b_n = \frac{n+1}{n}a_n = \frac{n+1}{n} \cdot n(n+1) = (n+1)^2, \text{ 10 分}$$

$$(ii) \text{ 由 (i) 可得: } b_n - a_n = (n+1)^2 - n(n+1) = n+1, \text{ 11 分}$$

因此, $\{b_n - a_n\}$ 是以 2 为首项, 1 为公差的等差数列, 12 分

$$\begin{aligned} \therefore T_n - S_n &= (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) - (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \\ &= (b_1 - a_1) + (b_2 - a_2) + \cdots + (b_n - a_n) \\ &= \frac{n(2+n+1)}{2} \\ &= \frac{n(n+3)}{2}. \text{ 15 分} \end{aligned}$$

18. 解: (1) $f(x) = x^3 - 5x^2 - 25x - 1$, 1 分

设切点为 $(x_0, x_0^3 - 5x_0^2 - 25x_0 - 1)$,

则切线斜率 $k = f'(x_0) = 3x_0^2 - 10x_0 - 25$, 3 分

切线方程为: $y - (x_0^3 - 5x_0^2 - 25x_0 - 1) = (3x_0^2 - 10x_0 - 25)(x - x_0)$,

$\therefore$ 切线过 $(0, 2)$. 将 $(0, 2)$ 代入上式整理得: $2x_0^3 - 5x_0^2 + 3 = 0$, 5 分

即: $(x_0 - 1)(2x_0^2 - 3x_0 - 3) = 0$ 该方程有三个实数解, 故切线有三条,

其中一解 $x_0 = 1$. 故一切线方程为: $y = -32x + 2$; 7 分

$$(2) f'(x) = 3x^2 + 2ax - a^2 = (3x - a)(x + a),$$

(i) 当 $a=0$ 时, $f'(x) = 3x^2 \geq 0$ 成立, $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增; 8 分

(ii) 当 $a>0$ 时, 由 $f'(x) > 0$, 得 $x < -a$ 或 $x > \frac{a}{3}$, 9 分

由 $f'(x) < 0$, 得 $-a < x < \frac{a}{3}$, 10 分

$\therefore f(x)$ 在 $(-a, \frac{a}{3})$ 上单调递减, 在 $(-\infty, -a)$ 和 $(\frac{a}{3}, +\infty)$ 上单调递增; 11 分

(iii) 当 $a<0$ 时, $f(x)$ 在 $(\frac{a}{3}, -a)$ 上单调递减; 在 $(-\infty, \frac{a}{3})$ 和 $(-a, +\infty)$ 上单调递增. 13 分

(3) 由 (2) 可知,

当 $a=0$ 时, $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 有唯一零点; 14 分

当 $a \neq 0$ 时, 由唯一零点得 $f(-a) \cdot f(\frac{a}{3}) > 0$, 即 $-\frac{3}{\sqrt[3]{5}} < a < 1$ 且 $a \neq 0$, 16 分

综上所述: $f(x)$ 有唯一零点, 即 $-\frac{3}{\sqrt[3]{5}} < a < 1$ 17 分

19. 解: (1) $f'(x) = \frac{1}{x} + 2x - 3 = \frac{2x^2 - 3x + 1}{x} = \frac{(2x-1)(x-1)}{x}$, 1 分

$x \in (0, \frac{1}{2})$, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增;

$x \in (\frac{1}{2}, 1)$, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减, 3 分

$$\therefore f(x)_{\max} = f(\frac{1}{2}) = \ln \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{3}{2} + a = \frac{3}{4} - \ln 2,$$

$\therefore a=2$; 4 分

$$(2) (i) f(a_n) = \ln a_n + a_n^2 - 3a_n + 2,$$

$$\text{可得 } 2a_n \cdot a_{n+1} = \ln a_n + a_n^2 + 1,$$

$$\therefore 2a_{n+1} = \frac{\ln a_n}{a_n} + a_n + \frac{1}{a_n}, \text{ 6 分}$$

设 $h(x) = \frac{\ln x}{x} + x + \frac{1}{x} (x > 1)$ ，则 $h'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} + 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - \ln x}{x^2}$ ，

令 $\varphi(x) = x^2 - \ln x$ ， $\varphi'(x) = 2x - \frac{1}{x} > 0$ ，..... 8 分

$\therefore h'(x)$ 为增函数，且 $h'(1) = 1 > 0$ ， $\therefore h(x)$ 为增函数，

又 $h(1) = 2$ ，则 $h(x) > 2$ ，即当 $a_n > 1$ 时， $a_{n+1} > 1$ ，

$\therefore a_1 > 1$ ，则 $a_2 > 1$ ，

$\therefore a_3 > 1$ ， $a_4 > 1$ ，.....， $a_n > 1$ ，

$\therefore a_n > 1$ ；..... 11 分

(ii) 可证明得出 $\ln x < x - 1$ (当 $x=1$ 时，“=” 成立)，..... 12 分

$\therefore \ln a_n < a_n - 1$ ，由 $2a_n a_{n+1} = \ln a_n + a_n^2 + 1$ 得：

$2a_n a_{n+1} < a_n - 1 + a_n^2 + 1$ ，即 $2a_n a_{n+1} < a_n(a_n + 1)$ ，..... 13 分

即 $a_{n+1} < \frac{1}{2}(a_n + 1)$ ，且 $a_1 - 1 = \frac{1}{3}$ ，

$\therefore a_{n+1} - 1 < \frac{1}{2}(a_n - 1) < (\frac{1}{2})^2(a_{n-1} - 1) < \cdots < (\frac{1}{2})^n(a_1 - 1) = \frac{1}{3} \cdot (\frac{1}{2})^n$ ，

$\therefore a_n - 1 < \frac{1}{3} \cdot (\frac{1}{2})^{n-1} (n \geq 2)$ ，..... 14 分

$\therefore \sum_{i=1}^n |1 - a_i| = \sum_{i=1}^n (a_i - 1) < \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n (\frac{1}{2})^{i-1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1[1 - (\frac{1}{2})^n]}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}(1 - \frac{1}{2^n}) < \frac{2}{3}$ ，..... 15 分

即 $3 \sum_{i=1}^n |a_i - 1| < 2$ 。..... 17 分