绝密★启用前

拉萨市2025届高三第一次联考
高三数学试卷

试卷共4页，19小题，满分150分。考试用时120分钟。

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号等填写在答题卡指定位置上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考生必须保持答题卡的整洁。考试结束后，请将答题卡交回。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 集合$\{x\in \mathbf{N} \mid |x|<3\}$中的元素个数为

A. 2　　B. 3　　C. 5　　D. 7

2. 已知一组数据3,7,11,7,13,15，则该组数据的第40百分位数为

A. 7　　B. 9　　C. 11　　D. 12

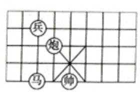
3. 已知函数$f(x)=1-2x-\sin x$，则曲线$y=f(x)$在$x=0$处的切线方程为

A. $2x+y-1=0$　　B. $2x-y+1=0$　　C. $3x-y+1=0$　　D. $3x+y-1=0$

4. 余切函数是三角函数的一种，表示为$y=\cot x$，余切函数与正切函数关系密切，它们之间的关系为$\cot x\cdot\tan x=1$. 已知$\tan\alpha=2$，则$\cot 2\alpha=$

A. $-\frac{4}{3}$　　B. $-\frac{3}{4}$　　C. $\frac{3}{4}$　　D. $\frac{4}{3}$

5. 中国象棋是一种古老的棋类游戏，大约有两千年的历史，是中华文明非物质文化的经典产物. 如图，棋盘由边长为1的正方形方格组成，已知"兵""马""炮""帅"分别位于A,B,C,D四点，则$(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC})\cdot(\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DC})=$



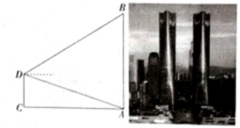
A. -2　　B. $-\sqrt{2}$　　C. 2　　D. $\sqrt{2}$

6. 已知O为坐标原点，双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的右焦点为$F$，点$M$在$C$上，且$M$在$x$轴上的射影为$F$，若$2\sqrt{3}|MF|=\sqrt{2}|OF|$，则$C$的渐近线方程为

A. $y=\pm\sqrt{2}x$　　B. $y=\pm 2x$

C. $y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$　　D. $y=\pm\frac{1}{2}x$

7. 南昌双子塔，坐落于红谷滩区赣江北岸，是南昌标志性建筑之一. 如图，某人准备测量双子塔中其中一座的高度（两座双子塔的高度相同），在地面上选择了一座高为t m的大楼CD，在大楼顶部D处测得双子塔顶部B的仰角为α，底部A的俯角为β，则双子塔的高度为



A. $\frac{2t\sin(\alpha+\beta)}{\sin 2\alpha}$ m　　B. $\frac{2t\sin(\alpha+\beta)}{\sin 2\beta}$ m　　C. $\frac{t\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\cos\beta}$ m　　D. $\frac{t\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\sin\beta}$ m

8. 若函数$f(x)=|\sin\omega x|+\sin|\omega x|(\omega>0)$在$(-1,1)$上恰有9个极值点，则$\omega$的取值范围是

A. $\left(\frac{13\pi}{2},\frac{17\pi}{2}\right]$　　B. $\left[\frac{13\pi}{2},+\infty\right)$　　C. $\left(\frac{9\pi}{2},\frac{13\pi}{2}\right]$　　D. $\left[\frac{13\pi}{2},\frac{17\pi}{2}\right)$

二、选择题：本题共3小题，每小题6分，共18分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得6分，部分选对的得部分分，有选错的得0分.

9. 若$x>y>z$，且$x+2y+z=0$，则

A. $x>0$　　B. $z<0$　　C. $xy>yz$　　D. $\frac{z}{x-y}<\frac{z}{x-z}$

10. 已知复数$z_1=3i$，$z_2=1-2i$（i为虚数单位），则

A. $\bar{z}_1=-3i$　　B. z_2的虚部为$-2i$

C. $|z_1|>|z_2|$　　D. $\frac{z_1}{z_2}$在复平面内对应的点位于第四象限

11. 如图，将棱长为2的正方体六个面的中心连线，可得到正八面体$E-ABCD-F$，则

A. 四边形$ABCD$为正方形

B. AE∥平面BCF

C. 异面直线AB与DE所成的角为$90°$

D. 若动点P在棱AE上运动，则$BP+DP$的最小值为$\sqrt{6}$

三、填空题：本题共3小题，每小题5分，共15分.

12. 已知抛物线$x^2=2\,024y$，则该抛物线的焦点坐标为________.

13. 已知命题："$\forall x\in\mathbf{R}$，$m^2-1=(m+m^2)x$"为真命题，则m的取值为________.

14. 古希腊著名数学家阿波罗尼斯发现：平面内到两个定点A,B的距离之比为定值$\lambda(\lambda>0$且$\lambda\neq1)$的点的轨迹是一个圆. 后来，人们将这个圆以他的名字命名，称为阿波罗尼斯圆，简称阿氏圆. 已知动点P在边长为6的正方形$ABCD$内（包含边界）运动，且满足$|PA|=2|PB|$，则动点P的轨迹长度为________.

四、解答题:本题共 5 小题,共 77 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.(13 分)某社区组织居民开展垃圾分类知识竞赛活动.随机对该社区 50 名居民的成绩进行统计,成绩均在$[75,100]$内,将成绩分成 5 组进行统计分析:第 1 组$[75,80)$有 4 人,第 2 组$[80,85)$有 16 人,第 3 组$[85,90)$有 15 人,第 4 组$[90,95)$有 10 人,第 5 组$[95,100]$有 5 人.现使用分层随机抽样的方法在第 3,4 组共选取 5 人参加垃圾分类志愿者工作.

(1)对该社区 50 名居民进行问卷调查,部分数据如下表所示,补全表格数据,并依据小概率值 $\alpha=0.005$ 的独立性检验,分析能否认为居民喜欢垃圾分类与性别有关;

	不喜欢垃圾分类	喜欢垃圾分类	合计
男	12		20
女		24	30
合计			50

(2)若从参加垃圾分类志愿者工作的 5 人中随机选取 3 人参加垃圾分类知识宣讲工作,记来自第 3 组的人数为 X,求 X 的分布列及数学期望.

附:$\chi^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$,$n=a+b+c+d$.

α	0.100	0.050	0.010	0.005	0.001
x_α	2.706	3.841	6.635	7.879	10.828

16.(15 分)已知 S_n 是等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和,且 $a_3+a_4+a_7=62$,$S_3=30$.

(1)求$\{a_n\}$的通项公式;

(2)记 $b_n=(-1)^n\cdot a_n$,求数列$\{b_n\}$的前 100 项和 T_{100}.

17.(15 分)已知函数 $f(x)=x^2-(\lambda+3)x+\lambda\ln x$.

(1)若 $\lambda=-3$,求 $f(x)$ 的单调区间;

(2)若 $f(x)$ 既有极大值,又有极小值,求实数 λ 的取值范围.

18.(17 分)已知等腰梯形 $ABCD$ 如图 1 所示,其中 $AD\,/\!/\,BC$,$\angle BAD=45°$,点 E 在线段 AD 上,且 $BE\perp AD$,$AD=3BC$,现沿 BE 进行翻折,使得平面 $ABE\perp$平面 $BCDE$,所得图形如图 2 所示.

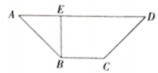


图 1

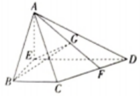


图 2

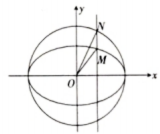
(1)证明:$CD\perp AE$;

(2)已知点 F 在线段 CD 上(含端点位置),点 G 在线段 AF 上(含端点位置).

(i)若 $CF=2DF$,点 G 为线段 AF 的中点,求 AC 与平面 BEG 所成角的正弦值;

(ii)探究:是否存在点 F,G,使得 $AF\perp$平面 BEG,若存在,求出$\dfrac{AG}{AF}$的值;若不存在,请说明理由.

19.(17 分)如图,定义:以椭圆中心为圆心、长轴长为直径的圆叫做椭圆的"伴随圆",过椭圆上一点 M 作 x 轴的垂线交其"伴随圆"于点 N,称点 N 为点 M 的"伴随点".已知椭圆 E:$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$上的点$\left(\sqrt{3},\dfrac{1}{2}\right)$的一个"伴随点"为$(\sqrt{3},1)$.



(1)求椭圆 E 的方程;

(2)过点$(-3,0)$的直线 l 与椭圆 E 交于不同的两点 A,B,点 C 与点 A 关于 x 轴对称.

(i)证明:直线 BC 恒过定点;

(ii)记(i)中的直线 BC 所过的定点为 T,若 B,C 在直线 $x=-3$ 上的射影分别为 B_1,C_1(B_1,C_1 为不同的两点),记$\triangle TBB_1$,$\triangle TCC_1$,$\triangle TB_1C_1$ 的面积分别为 S_1,S_2,S_3,求$\dfrac{S_1+S_2}{S_3}$的取值范围.

拉萨市 2025 届高三第一次联考

高三数学参考答案

1.【答案】B

【解析】$\{x\in\mathbf{N}||x|<3\}=\{0,1,2\}$,该集合中的元素有 3 个. 故选 B.

2.【答案】A

【解析】因为 $6\times0.4=2.4$,所以这组数据的第 40 百分位数为第三个数据 7. 故选 A.

3.【答案】D

【解析】因为 $f(x)=1-2x-\sin x$,所以 $f'(x)=-2-\cos x$,$f(0)=1$,$f'(0)=-3$,所以曲线 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 处的切线方程为 $y=-3x+1$,即 $3x+y-1=0$. 故选 D.

4.【答案】B

【解析】$\cot 2\alpha=\dfrac{1}{\tan 2\alpha}=\dfrac{1-\tan^2\alpha}{2\tan\alpha}=\dfrac{1-4}{2\times2}=-\dfrac{3}{4}$. 故选 B.

5.【答案】A

【解析】$(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC})\cdot(\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DC})=\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{CA}=2\times\sqrt{2}\times\cos 135^\circ=-2$. 故选 A.

6.【答案】C

【解析】不妨设点 M 在第一象限,联立 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1,\\ x=c,\end{cases}$ 得 $M\left(c,\dfrac{b^2}{a}\right)$,故 $|MF|=\dfrac{b^2}{a}$,则 $2\sqrt{3}|MF|=\sqrt{2}|OF|\Leftrightarrow$ $\dfrac{\sqrt{6}b^2}{a}=c\Leftrightarrow\sqrt{6}c^2-ac-\sqrt{6}a^2=0\Leftrightarrow\dfrac{c}{a}=\sqrt{1+\dfrac{b^2}{a^2}}=\sqrt{\dfrac{3}{2}}\Leftrightarrow\dfrac{b}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,故所求渐近线方程为 $y=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}x$. 故选 C.

7.【答案】D

【解析】设双子塔的高度 $AB=x$ m,由题意可得 $CD=t$ m,$\angle DAC=\beta$,$\angle BDA=\alpha+\beta$,则在 $\triangle ADC$ 中,$AD=\dfrac{CD}{\sin\beta}=\dfrac{t}{\sin\beta}$,在 $\triangle ABD$ 中,$\angle ABD=\dfrac{\pi}{2}-\alpha$,由正弦定理得 $\dfrac{AB}{\sin\angle ADB}=\dfrac{AD}{\sin\angle ABD}$,即 $\dfrac{AB}{\sin(\alpha+\beta)}=\dfrac{AD}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)}$,所以 $AB=\dfrac{AD\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha}=\dfrac{t\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\sin\beta}$. 故选 D.

8.【答案】A

【解析】由题得 $f(x)$ 是偶函数,$f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上有 9 个极值点,易知 $x=0$ 是极值点,则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上有 4 个极值点,$y=|\sin x|+\sin|x|$ 在 $(0,+\infty)$ 上的前 5 个极值点依次为 $\dfrac{\pi}{2},\dfrac{5\pi}{2},\dfrac{9\pi}{2},\dfrac{13\pi}{2},\dfrac{17\pi}{2}$,所以 $\dfrac{13\pi}{2}<\omega\leqslant\dfrac{17\pi}{2}$. 故选 A.

9.【答案】ABD(每选对 1 个得 2 分)

【解析】由 $x>y>z$ 且 $x+2y+z=0$ 得 $x+2y+z<x+2x+x=4x$,所以 $4x>0$,$x>0$,A 正确;$x+2y+z>z+2z+z=4z$,所以 $4z<0$,$z<0$,B 正确;取 $x=1$,$y=0$,$z=-1$,则 $xy=yz$,C 错误;由 $x>y>z$ 得 $0<x-y<x-z$,所以 $\dfrac{1}{x-y}>\dfrac{1}{x-z}$,因为 $z<0$,所以 $\dfrac{z}{x-y}<\dfrac{z}{x-z}$,D 正确. 故选 ABD.

10.【答案】AC(每选对 1 个得 3 分)

【解析】A 显然正确;z_2 的虚部为 -2,B 错误;$|z_1|=3$,$|z_2|=\sqrt{1+(-2)^2}=\sqrt{5}$,故 $|z_1|>|z_2|$,C 正确;$\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{3\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}}=\dfrac{3\mathrm{i}(1+2\mathrm{i})}{(1-2\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})}=-\dfrac{6}{5}+\dfrac{3}{5}\mathrm{i}$,其在复平面内对应的点的坐标为 $\left(-\dfrac{6}{5},\dfrac{3}{5}\right)$,位于第二象限,D 错误. 故选 AC.

11.【答案】ABD(每选对 1 个得 2 分)

【解析】由正方体及正八面体的关系可知,正八面体各棱均相等,故四边形 $ABCD$ 是菱形,易求得 $AB=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$,$AC=2$,所以 $AB\perp BC$,即四边形 $ABCD$ 为正方形,A 正确;同理可证得四边形 $AECF$ 为正方形,所以 $AE/\!/CF$,又 $AE\not\subset$ 平面 BCF,$CF\subset$ 平面 BCF,所以 $AE/\!/$ 平面 BCF,B 正确;由 $AB/\!/CD$,可知 $\angle CDE$ 是异面直线 AB 与 DE 所成的角,而由 $\triangle CDE$ 为等边三角形可知 $\angle CDE=60°$,即异面直线 AB 与 DE 所成的角为 $60°$,C 错误;将 $\triangle ABE$ 沿着 AE 翻折,使得 $\triangle ADE$ 与 $\triangle ABE$ 在同一平面内,则可得菱形 $BADE$,此时 BD 与 AE 的交点 P 即为使 $BP+DP$ 取最小值的点 P,此时 $BP+DP=BD=\sqrt{AB^2+AD^2-2AB\cdot AD\cdot\cos 120°}=\sqrt{6}$,即 $BP+DP$ 的最小值为 $\sqrt{6}$,D 正确. 故选 ABD.

12.【答案】$(0,506)$

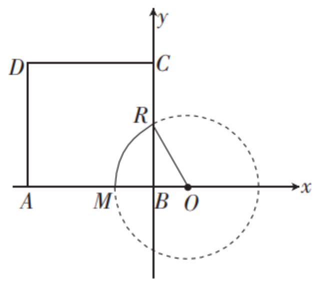
【解析】易知抛物线的焦点坐标为 $(0,506)$.

13.【答案】-1

【解析】因为命题:"$\forall x\in\mathbf{R}$, $m^2-1=(m+m^2)x$"为真命题,即等式 $m^2-1=(m+m^2)x$ 恒成立,则 $\begin{cases}m^2-1=0,\\ m+m^2=0,\end{cases}$ 解得 $m=-1$.

14.【答案】$\frac{4\pi}{3}$

【解析】如图,以 B 为原点,AB,BC 所在直线为 x,y 轴,建立平面直角坐标系 xBy,则 $A(-6,0)$,$B(0,0)$,设 $P(x,y)$,因为 $|PA|=2|PB|$,即 $\sqrt{(x+6)^2+y^2}=2\sqrt{x^2+y^2}$,整理得 $(x-2)^2+y^2=16$. 所以动点 P 的轨迹为以 $O(2,0)$ 为圆心、4 为半径的圆的一部分. 设圆 O 与线段 AB 交于点 M,与线段 BC 交于点 R,因为在 $\mathrm{Rt}\triangle RBO$ 中,$|RO|=4$,$|BO|=2$,所以 $\angle ROB=\frac{\pi}{3}$,所以 $\overset{\frown}{MR}=\frac{\pi}{3}\times 4=\frac{4\pi}{3}$,所以点 P 的轨迹长度为 $\frac{4\pi}{3}$.



15. 解:(1)补充列联表如下所示,

	不喜欢垃圾分类	喜欢垃圾分类	合计
男	12	8	20
女	6	24	30
合计	18	32	50

(3 分)

零假设 H_0:居民喜欢垃圾分类与性别无关,

则 $\chi^2=\frac{50\times(288-48)^2}{20\times30\times18\times32}\approx 8.333>7.879$,(5 分)

所以依据小概率值 $\alpha=0.005$ 的独立性检验,推断 H_0 不成立,即认为喜欢垃圾分类与性别有关.(6 分)

(2)用分层随机抽样的方法在第 3,4 组抽取的人数分别是 3,2.(7 分)

所以 X 可能的取值为 1,2,3,

$P(X=1)=\frac{C_3^1C_2^2}{C_5^3}=\frac{3}{10}$,

$P(X=2)=\frac{C_3^2C_2^1}{C_5^3}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$,

$P(X=3)=\frac{C_3^3}{C_5^3}=\frac{1}{10}$,

所以 X 的分布列为

X	1	2	3
P	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$

(11 分)

$E(X)=\frac{3}{10}\times1+\frac{3}{5}\times2+\frac{1}{10}\times3=\frac{9}{5}$.(13 分)

16. 解:(1)设公差为 d,结合题设有$\begin{cases}3a_1+11d=62,\\3a_1+\frac{3\times2}{2}d=30,\end{cases}$(3 分)

解得$\begin{cases}a_1=6,\\d=4,\end{cases}$(5 分)

则 $a_n=a_1+(n-1)d=6+4(n-1)=4n+2$,

故$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=4n+2$.(7 分)

(2)$b_n=(-1)^n\cdot a_n=(-1)^n\cdot(4n+2)$,(9 分)

所以 $T_{100}=-6+10-14+18-\cdots-(4\times99+2)+(4\times100+2)$

$=(-6+10)+(-14+18)+\cdots+(-4\times99-2+4\times100+2)$

$=4\times50=200$.(15 分)

17. 解:(1)$\lambda=-3$ 时,$f(x)=x^2-3\ln x,x\in(0,+\infty)$,

$f'(x)=2x-\frac{3}{x}=\frac{2x^2-3}{x}=\frac{(\sqrt{2}x+\sqrt{3})(\sqrt{2}x-\sqrt{3})}{x}$,(2 分)

令 $f'(x)=0$,解得 $x=\frac{\sqrt{6}}{2}$(负值舍去),(3 分)

故当 $x\in\left(0,\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$时,$f'(x)<0$,$f(x)$单调递减,

当 $x\in\left(\frac{\sqrt{6}}{2},+\infty\right)$时,$f'(x)>0$,$f(x)$单调递增,(5 分)

故$f(x)$的单调递减区间为$\left(0,\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$,单调递增区间为$\left(\frac{\sqrt{6}}{2},+\infty\right)$.(7 分)

(2)依题意,$f'(x)=2x-(\lambda+3)+\frac{\lambda}{x}=\frac{2x^2-(\lambda+3)x+\lambda}{x}$,(9 分)

令 $f'(x)=0$,则问题转化为 $2x^2-(\lambda+3)x+\lambda=0$ 有两个不同的正根,

故$\begin{cases}\Delta=(\lambda+3)^2-8\lambda>0,\\\lambda+3>0,\\\lambda>0,\end{cases}$(13 分)

解得 $\lambda>0$,故实数 λ 的取值范围为$(0,+\infty)$.(15 分)

18. (1)证明:因为平面 $ABE\perp$平面 $BCDE$,$AE\perp BE$,平面 $ABE\cap$平面 $BCDE=BE$,$AE\subset$平面 ABE,

所以 $AE\perp$平面 $BCDE$;(2 分)

而 $CD\subset$平面 $BCDE$,故 $CD\perp AE$.(3 分)

(2)解:由题意易知 EB,ED,EA 两两垂直,

故以 E 为坐标原点,EB,ED,EA 所在直线分别为 x,y,z 轴建立如图所示的空间直角坐标系,不妨设 $BC=1$,则 $BE=AE=\frac{1}{2}DE=1$, (i)因为$\angle BAD=45°$,故$A(0,0,1)$,$C(1,1,0)$,$B(1,0,0)$,$E(0,0,0)$,$F\left(\frac{1}{3},\frac{5}{3},0\right)$,$G\left(\frac{1}{6},\frac{5}{6},\frac{1}{2}\right)$,

故$\overrightarrow{EB}=(1,0,0)$,$\overrightarrow{EG}=\left(\frac{1}{6},\frac{5}{6},\frac{1}{2}\right)$,(5 分)

设$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$为平面BEG的法向量,则$\begin{cases}\overrightarrow{EB}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\\overrightarrow{EG}\cdot\boldsymbol{n}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}x=0,\\\frac{1}{6}x+\frac{5}{6}y+\frac{1}{2}z=0,\end{cases}$

令$z=-5$,则$\boldsymbol{n}=(0,3,-5)$为平面BEG的一个法向量,(8 分)

而$\overrightarrow{AC}=(1,1,-1)$,记直线$AC$与平面$BEG$所成的角为$\theta$,

则$\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{AC},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{AC}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{AC}||\boldsymbol{n}|}=\frac{8}{\sqrt{3}\times\sqrt{34}}=\frac{4\sqrt{102}}{51}$.(10 分)

(ii)由题意$D(0,2,0)$,设$\overrightarrow{EF}=\lambda\overrightarrow{EC}+(1-\lambda)\overrightarrow{ED}=(\lambda,\lambda,0)+(0,2-2\lambda,0)=(\lambda,2-\lambda,0)$,$0\leqslant\lambda\leqslant1$,

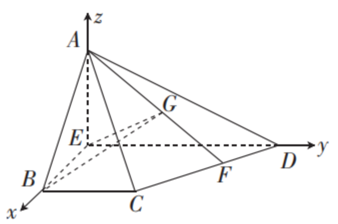
故$F(\lambda,2-\lambda,0)$,$\overrightarrow{AF}=(\lambda,2-\lambda,-1)$,(12 分)

设$\overrightarrow{AG}=\mu\overrightarrow{AF}=(\mu\lambda,2\mu-\mu\lambda,-\mu)$,$0\leqslant\mu\leqslant1$,所以$G(\mu\lambda,2\mu-\mu\lambda,1-\mu)$,(13 分)

而$\overrightarrow{EB}=(1,0,0)$,$\overrightarrow{EG}=(\mu\lambda,2\mu-\mu\lambda,1-\mu)$,(14 分)

若$AF\perp$平面BEG,则$\begin{cases}\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{EB}=0,\\\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{EG}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}\lambda=0,\\\mu\lambda^2+\mu(2-\lambda)^2+\mu-1=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}\lambda=0,\\\mu=\frac{1}{5},\end{cases}$(16 分)

故当F,D重合,点G的坐标为$\left(0,\frac{2}{5},\frac{4}{5}\right)$时,$AF\perp$平面$BEG$,此时$\frac{AG}{AF}=\frac{1}{5}$.(17 分)



19.(1)解:因为椭圆$E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$过点$\left(\sqrt{3},\frac{1}{2}\right)$,其伴随圆$x^2+y^2=a^2$过点$(\sqrt{3},1)$.

所以$\begin{cases}\frac{3}{a^2}+\frac{1}{4b^2}=1,\\(\sqrt{3})^2+1^2=a^2,\end{cases}$解得$\begin{cases}a^2=4,\\b^2=1.\end{cases}$(2 分)

所以椭圆E的方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$.(4 分)

(2)(i)证明:当直线l的斜率不为 0 时,设直线l的方程为$x=my-3$,$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则$C(x_1,-y_1)$,

联立$\begin{cases}\frac{x^2}{4}+y^2=1,\\x=my-3,\end{cases}$整理得$(m^2+4)y^2-6my+5=0$,则$y_1+y_2=\frac{6m}{m^2+4}$,$y_1y_2=\frac{5}{m^2+4}$,(5 分)

$\Delta=(-6m)^2-4\times5(m^2+4)=16(m^2-5)>0$,所以$m^2>5$,(6 分)

直线BC的方程为$y+y_1=\frac{y_2+y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$,由椭圆的对称性知,若存在定点,则必在$x$轴上.

当$y=0$时,$x=\frac{y_1(x_2-x_1)}{y_2+y_1}+x_1=\frac{x_1y_2+x_2y_1}{y_2+y_1}=\frac{(my_1-3)y_2+(my_2-3)y_1}{y_2+y_1}$

$$=\frac{2my_1y_2-3(y_1+y_2)}{y_2+y_1}=\frac{2my_1y_2}{y_1+y_2}-3=\frac{2m\cdot\frac{5}{m^2+4}}{\frac{6m}{m^2+4}}-3=\frac{5}{3}-3=-\frac{4}{3},$$

即直线 BC 恒过定点$\left(-\frac{4}{3},0\right)$.(8 分)

当直线 l 的斜率为 0 时,直线 BC 的方程为 $y=0$,也过$\left(-\frac{4}{3},0\right)$.(9 分)

综上,直线 BC 恒过定点$\left(-\frac{4}{3},0\right)$.(10 分)

(ii)解:法一:由题意知 l 的斜率存在且不为 0,$T\left(-\frac{4}{3},0\right)$,

设直线 l 的方程为 $x=my-3(m^2>5)$,$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,$C(x_1,-y_1)$,

$S_1=\frac{(x_2+3)|y_2|}{2}=\frac{(my_2-3+3)|y_2|}{2}=\frac{my_2|y_2|}{2}$,

$S_2=\frac{(x_1+3)|y_1|}{2}=\frac{(my_1-3+3)|y_1|}{2}=\frac{my_1|y_1|}{2}$,

$S_3=\frac{|y_1+y_2|\left(-\frac{4}{3}+3\right)}{2}=\frac{5|y_1+y_2|}{6}$,(12 分)

由(i)知 $m(y_1+y_2)=\frac{6m^2}{m^2+4}>0$ 且 $y_1y_2=\frac{5}{m^2+4}>0$,

则$\frac{S_1+S_2}{S_3}=\frac{\frac{my_2|y_2|}{2}+\frac{my_1|y_1|}{2}}{\frac{5|y_1+y_2|}{6}}=\frac{3m(y_1|y_1|+y_2|y_2|)}{5|y_1+y_2|}=\frac{3m(y_1^2+y_2^2)}{5(y_1+y_2)}=\frac{3m[(y_1+y_2)^2-2y_1y_2]}{5(y_1+y_2)}$

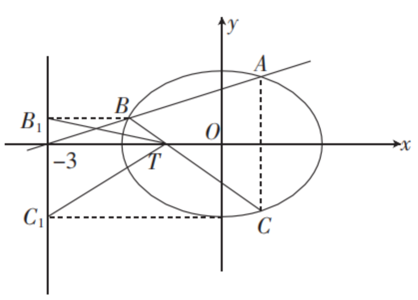
$=\frac{3m}{5}\left[(y_1+y_2)-\frac{2y_1y_2}{y_1+y_2}\right]=\frac{3m}{5}\left(\frac{6m}{m^2+4}-\frac{2\cdot\frac{5}{m^2+4}}{\frac{6m}{m^2+4}}\right)=\frac{3}{5}\left(\frac{6m^2+24-24}{m^2+4}-\frac{5}{3}\right)$

$=\frac{3}{5}\left(6-\frac{24}{m^2+4}-\frac{5}{3}\right)=\frac{13}{5}-\frac{72}{5(m^2+4)}$,(15 分)

因为 $m^2>5$,所以 $m^2+4>9$,所以$\frac{1}{m^2+4}\in\left(0,\frac{1}{9}\right)$,

所以$\frac{72}{5(m^2+4)}\in\left(0,\frac{8}{5}\right)$,所以$\frac{13}{5}-\frac{72}{5(m^2+4)}\in\left(1,\frac{13}{5}\right)$,

故$\frac{S_1+S_2}{S_3}$的取值范围为$\left(1,\frac{13}{5}\right)$.(17 分)



法二:$\frac{S_1+S_2}{S_3}=\frac{S_1+S_2+S_3}{S_3}-1=\frac{S_{梯形BB_1C_1C}}{S_3}-1=\frac{\frac{1}{2}(x_1+3+x_2+3)|y_1+y_2|}{\frac{1}{2}\times\left(-\frac{4}{3}+3\right)|y_1+y_2|}-1=\frac{13+3(x_1+x_2)}{5}$,(13 分)

由(i)知 $x_1+x_2=my_1-3+my_2-3=m(y_1+y_2)-6=m\cdot\frac{6m}{m^2+4}-6=\frac{-24}{m^2+4}$,

$$\frac{S_1+S_2}{S_3}=\frac{13+3\cdot\frac{-24}{m^2+4}}{5}=\frac{13}{5}-\frac{72}{5(m^2+4)}.$$（15 分）

（剩余部分同解法一）

法三：由（i）知直线 BC 恒过定点 $T\left(-\frac{4}{3},0\right)$，易知直线 BC 的斜率不为 0，

设直线 BC 的方程为 $x=ty-\frac{4}{3}$，$B(x_2,y_2)$，$C(x_3,y_3)$，

联立 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+y^2=1,\\ x=ty-\frac{4}{3},\end{cases}$ 整理得 $9(t^2+4)y^2-24ty-20=0$，

则 $y_2+y_3=\frac{24t}{9(t^2+4)}=\frac{8t}{3(t^2+4)}$，$y_2y_3=\frac{-20}{9(t^2+4)}<0$，（11 分）

$\Delta=(-24t)^2+4\times20\times9(t^2+4)>0$ 恒成立，

$$S_1=\frac{(x_2+3)|y_2|}{2}=\frac{\left(ty_2-\frac{4}{3}+3\right)|y_2|}{2}=\frac{\left(ty_2+\frac{5}{3}\right)|y_2|}{2},$$

$$S_2=\frac{(x_3+3)|y_3|}{2}=\frac{\left(ty_3-\frac{4}{3}+3\right)|y_3|}{2}=\frac{\left(ty_3+\frac{5}{3}\right)|y_3|}{2},$$

$$S_3=\frac{|y_2-y_3|\left(-\frac{4}{3}+3\right)}{2}=\frac{5|y_2-y_3|}{6},$$（13 分）

因为 $y_2y_3=\frac{-20}{9(t^2+4)}<0$，不妨设 $y_2>0$，$y_3<0$，

$$\frac{S_1+S_2}{S_3}=\frac{\frac{\left(ty_2^2+\frac{5}{3}y_2\right)-\left(ty_3^2+\frac{5}{3}y_3\right)}{2}}{\frac{5(y_2-y_3)}{6}}=\frac{3}{5}\cdot\frac{t(y_2+y_3)(y_2-y_3)+\frac{5}{3}(y_2-y_3)}{y_2-y_3}$$

$$=\frac{3}{5}t(y_2+y_3)+1=\frac{3}{5}\cdot\frac{8t^2}{3(t^2+4)}+1=\frac{8t^2+32-32}{5(t^2+4)}+1=\frac{13}{5}-\frac{32}{5(t^2+4)},$$（15 分）

因为 $t^2>0$，所以 $t^2+4>4$，所以 $\frac{32}{5(t^2+4)}\in\left(0,\frac{8}{5}\right)$，所以 $\frac{13}{5}-\frac{32}{5(t^2+4)}\in\left(1,\frac{13}{5}\right)$，

故 $\frac{S_1+S_2}{S_3}$ 的取值范围为 $\left(1,\frac{13}{5}\right)$.（17 分）