# 2025年高考综合改革适应性演练

## 数学答案

### 一、单选题

1.（2025 年 1 月八省联考数学）已知集合 $A=\{-1,0,1\},B=\{0,1,4\}$，则 $A\cap B=$（　）

A．$\{0\}$　　B．$\{1\}$　　C．$\{0,1\}$　　D．$\{-1,0,1,4\}$

【答案】C

【难度】0.94

【知识点】交集的概念及运算

【分析】由交集的运算求解即可；

【详解】由题意可得 $A\cap B=\{0,1\}$.

故选：C.

2.（2025 年 1 月八省联考数学）函数 $f(x)=\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ 的最小正周期是（　）

A．$\frac{\pi}{4}$　　B．$\frac{\pi}{2}$　　C．$\pi$　　D．$2\pi$

【答案】D

【难度】0.94

【知识点】求余弦（型）函数的最小正周期

【分析】根据三角函数最小正周期的求法求得正确答案.

【详解】依题意，$f(x)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{1}=2\pi$.

故选：D

3.（2025 年 1 月八省联考数学）$|2-4\mathrm{i}|=$（　）

A．2　　B．4　　C．$2\sqrt{5}$　　D．6

【答案】C

【难度】0.94

【知识点】求复数的模

【分析】根据复数模的概念直接求解.

【详解】由题意：$|z|=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$.

故选：C

4.（2025 年 1 月八省联考数学）已知向量$\vec{a}=(0,1),\vec{b}=(1,0)$，则$\vec{a}\cdot(\vec{a}-\vec{b})=$（ ）

A．2　　B．1　　C．0　　D．$-1$

【答案】B

【难度】0.94

【知识点】平面向量线性运算的坐标表示、数量积的坐标表示

【分析】利用向量的坐标运算求解.

【详解】Q$\vec{a}=(0,1)$，$\vec{b}=(1,0)$，

$\therefore \vec{a}-\vec{b}=(-1,1)$，

$\therefore \vec{a}\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0\times(-1)+1\times1=1$.

故选：B.

5.（2025 年 1 月八省联考数学）双曲线$x^2-\frac{y^2}{9}=1$的渐近线方程为（ ）

A．$y=\pm x$　　B．$y=\pm 2x$　　C．$y=\pm 3x$　　D．$y=\pm 4x$

【答案】C

【难度】0.94

【知识点】已知方程求双曲线的渐近线

【分析】根据双曲线的标准方程，结合渐近线方程，可得答案.

【详解】由方程$x^2-\frac{y^2}{9}=1$，则$a=1,b=3$，所以渐近线$y=\pm\frac{b}{a}x=\pm 3x$.

故选：C.

6.（2025 年 1 月八省联考数学）底面直径和母线长均为 2 的圆锥的体积为（ ）

A．$\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$　　B．$\pi$　　C．$2\pi$　　D．$3\pi$

【答案】A

【难度】0.85

【知识点】锥体体积的有关计算

【分析】由勾股定理先求出圆锥的高，进而利用圆锥体积公式求解即可.

【详解】由题可知圆锥的底面半径$R=1$，母线长$l=2$，高$h=\sqrt{l^2-R^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$，

$\therefore$圆锥的体积为$V=\frac{1}{3}\pi R^2h=\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$.

故选：A.

7．（2025 年 1 月八省联考数学）在$\triangle ABC$中，$BC=8,AC=10,\cos\angle BAC=\frac{3}{5}$，则$\triangle ABC$的面积为（　）

A．6　　　　B．8　　　　C．24　　　　D．48

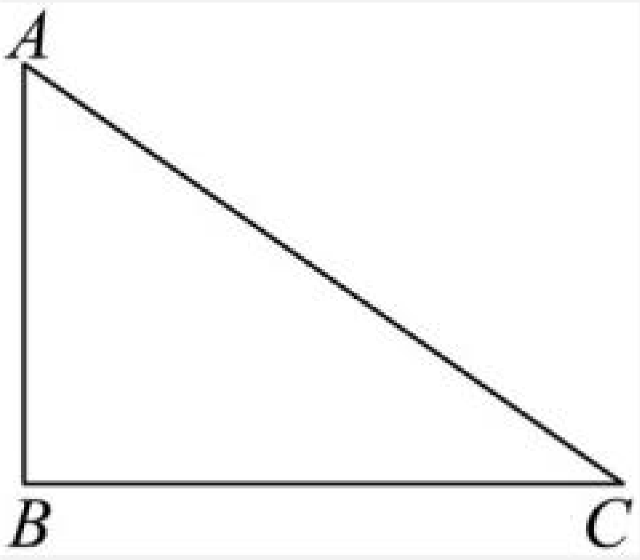
【答案】C

【难度】0.65

【知识点】三角形面积公式及其应用、余弦定理解三角形

【分析】先根据余弦定理求出$AB$边的长度，再利用三角形面积公式求出三角形面积即可.

【详解】设$AB=x$，根据余弦定理$BC^2=AC^2+AB^2-2AC\cdot AB\cdot\cos\angle BAC$，




已知$BC=8$，$AC=10$，$\cos\angle BAC=\frac{3}{5}$，代入可得：

$8^2=10^2+x^2-2\times10\times x\times\frac{3}{5}$，即$x^2-12x+36=0$，解得$x=6$，

由于$BC^2+AB^2=64+36=100=AC^2$，则$\triangle ABC$为直角三角形，

则$S=\frac{1}{2}\times6\times8=24$.

故选：C.

8．（2025 年 1 月八省联考数学）已知函数$f(x)=x|x-a|-2a^2$，若当$x>2$时，$f(x)>0$，则$a$的取值范围是（　）

【答案】B

【难度】0.4

【知识点】解含有参数的一元二次不等式、分类讨论解绝对值不等式

【分析】分类讨论，去掉绝对值，结合一元二次不等式的求解即可得解.

【详解】当$a>2$，$x>2$时，$f(x)=x|x-a|-2a^2=\begin{cases}x^2-ax-2a^2,x\geq a\\-x^2+ax-2a^2,2<x<a\end{cases}$，

当$2<x<a$时，$f(x)=-x^2+ax-2a^2$，此时$\Delta=a^2-4\times2a^2=-7a^2<0$，

所以$f(x)<0$，不满足当$x>2$时，$f(x)>0$，故$a>2$不符合题意；

当$0<a\leq2$，$x>2$时，$f(x)=x|x-a|-2a^2=x^2-ax-2a^2=(x-2a)(x+a)>0$，解得$x>2a$，

由于$x>2$时，$f(x)>0$，故$2a\leqslant2$，解得$0<a\leq1$；

当$a=0$，$x>2$时，$f(x)=x^2>0$恒成立，符合题意；

当$a<0$，$x>2$时，$f(x)=x|x-a|-2a^2=x^2-ax-2a^2=(x-2a)(x+a)>0$，解得$x>-a$，

由于$x>2$时，$f(x)>0$，故$-a\leq2$，解得$-2\leq a<0$.

综上$-2\leq a\leq1$.

故选：B

## 二、多选题

9.（2025 年 1 月八省联考数学）已知 $F(2,0)$ 是抛物线 $C:y^2=2px$ 的焦点，$M$ 是 $C$ 上的点，$O$ 为坐标原点．则（　）

A．$p=4$

B．$|MF|\geq|OF|$

C．以 $M$ 为圆心且过 $F$ 的圆与 $C$ 的准线相切

D．当 $\angle OFM=120°$ 时，$\triangle OFM$ 的面积为 $2\sqrt{3}$

【答案】ABC

【难度】0.65

【知识点】抛物线定义的理解、根据抛物线方程求焦点或准线、抛物线中的三角形或四边形面积问题、直线与抛物线交点相关问题

【分析】根据焦点坐标求出 $p=4$ 判断 A，根据抛物线定义判断 B，C，应用已知联立方程求出点的坐标计算判断三角形的面积判断 D.

求出点的坐标计算判断三角形的面积判断 D.

【详解】因为 $F(2,0)$ 是抛物线 $C:y^2=2px$ 的焦点，所以 $\frac{p}{2}=2$，即得 $p=4$，A 选项正确；

设 $M\left(x_0,y_0\right)$ 在 $y^2=8x$ 上，所以 $x_0\geq 0$，

所以 $|MF|=x_0+\frac{p}{2}\geq\frac{p}{2}=|OF|$，B 选项正确；

因为以 $M$ 为圆心且过 $F$ 的圆半径为 $|MF|=x_0+2$ 等于 $M$ 与 $C$ 的准线的距离，所以以 $M$ 为圆心且过 $F$ 的圆与 $C$ 的准线相切，C 选项正确；

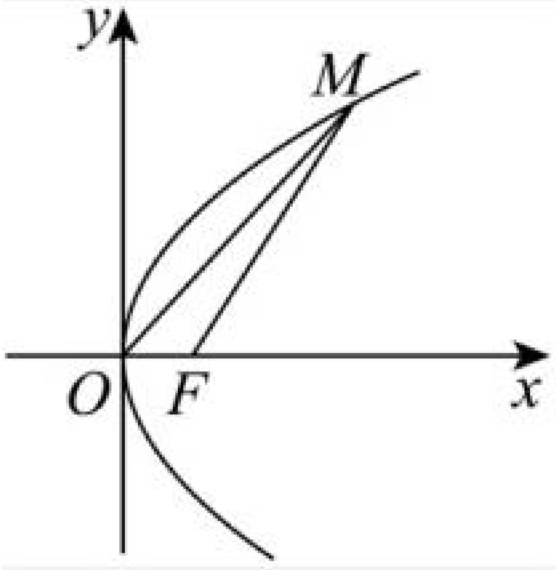
当 $\angle OFM=120°$ 时，$x_0>2$，

$\frac{y_0}{x_0-2}=\tan 60°=\sqrt{3}$，且 $y_0^2=8x_0$，　$y_0>0$，

所以 $\sqrt{3}y_0^2-8y_0-16\sqrt{3}=0$，$y_0=4\sqrt{3}$ 或 $y_0=-\frac{4\sqrt{3}}{3}$ 舍

所以 $\triangle OFM$ 的面积为 $S_{\triangle OFM}=\frac{1}{2}|OF|\times|y_0|=4\sqrt{3}$，D 选项错误.

故选：ABC.



10．（2025 年 1 月八省联考数学）在人工神经网络中，单个神经元输入与输出的函数关系可以称为激励函数．双曲正切函数是一种激励函数．定义双曲正弦函数 $\sinh x=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}$，双曲余弦函数 $\cosh x=\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}$，双曲正切函数 $\tanh x=\dfrac{\sinh x}{\cosh x}$．则（　）

A．双曲正弦函数是增函数　　　　B．双曲余弦函数是增函数

C．双曲正切函数是增函数　　　　D．$\tanh(x+y)=\dfrac{\tanh x+\tanh y}{1+\tanh x\tanh y}$

【答案】ACD

【难度】0.65

【知识点】用导数判断或证明已知函数的单调性、函数新定义

【分析】对 A、B：借助导数求导后即可得；对 C：借助双曲正弦函数与双曲余弦函数将双曲正切函数化简后，结合指数函数性质即可得；对 D：借助双曲正弦函数与双曲余弦函数，分别将等式左右两边化简即可得

曲正切函数化简后，结合指数函数性质即可得；对 D：借助双曲正弦函数与双曲余弦函数，分别将等式左右两边化简即可得.

【详解】对 A：令 $f(x)=\sinh x=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}$，

则 $f'(x)=\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}>0$ 恒成立，故双曲正弦函数是增函数，故 A 正确；

对 B：令 $g(x)=\cosh x=\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}$，

则 $g'(x)=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}$，由 A 知，$g'(x)$ 为增函数，又 $g'(0)=\dfrac{e^{0}-e^{0}}{2}=0$，

故当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$g'(x)<0$，当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，

故 $g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，故 B 错误；

对 C：$\tanh x=\dfrac{\sinh x}{\cosh x}=\dfrac{\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}}{\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}}=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}=\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}=1-\dfrac{2}{e^{2x}+1}$，

由 $y=e^{2x}+1$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，且 $y=e^{2x}+1>1$，

故 $\tanh x=1-\dfrac{2}{e^{2x}+1}$ 是增函数，故 C 正确；

对 D：由 C 知 $\tanh x=\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$，则 $\tanh(x+y)=\dfrac{e^{2x+2y}-1}{e^{2x+2y}+1}$，

$$\frac{\tanh x+\tanh y}{1+\tanh x\tanh y}=\frac{\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}+\frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1}}{1+\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\cdot\frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1}}=\frac{(e^{2x}-1)(e^{2y}+1)+(e^{2y}-1)(e^{2x}+1)}{(e^{2x}+1)(e^{2y}+1)+(e^{2x}-1)(e^{2y}-1)}$$

$$=\frac{e^{2x+2y}+e^{2x}-e^{2y}-1+e^{2x+2y}-e^{2x}+e^{2y}-1}{e^{2x+2y}+e^{2x}+e^{2y}+1+e^{2x+2y}-e^{2x}-e^{2y}+1}=\frac{2e^{2x+2y}-2}{2e^{2x+2y}+2}=\frac{e^{2x+2y}-1}{e^{2x+2y}+1},$$

故 $\tanh(x+y)=\dfrac{\tanh x+\tanh y}{1+\tanh x\tanh y}$，故 D 正确.

故选：ACD.

11.（2025 年 1 月八省联考数学）下面四个绳结中，不能无损伤地变为图中的绳结的有（ ABD ）

A.  B.  C.  D. 

## 三、填空题

12.（2025 年 1 月八省联考数学）已知函 $f(x)=a^x(a>0,a\neq 1)$，若 $f(\ln 2)f(\ln 4)=8$，则 $a=$__________.

【答案】e

【难度】0.85

【知识点】指数幂的运算、对数的运算

【分析】根据条件，利用指数和对数的运算求得答案.

【详解】由 $f(\ln 2)f(\ln 4)=8$，可得 $a^{\ln 2}\cdot a^{\ln 4}=8$，

即 $a^{\ln 2+\ln 4}=a^{3\ln 2}=8$，也即 $\left(a^{\ln 2}\right)^3=2^3$，

$\because a>0$ 且 $a\neq 1$，$\therefore a^{\ln 2}=2$，

两边取对数得：$\ln 2\cdot\ln a=\ln 2$，解得 $a=\mathrm{e}$.

故答案为：e.

13.（2025 年 1 月八省联考数学）有 8 张卡片，分别标有数字 1，2，3，4，5，6，7，8，现从这 8 张卡片中随机抽出 3 张，则抽出的 3 张卡片上的数字之和与其余 5 张卡片上的数字之和相等的概率为__________.

【答案】$\frac{3}{56}$

【难度】0.85

【知识点】实际问题中的组合计数问题、计算古典概型问题的概率

【分析】先写出基本事件总数 $C_8^3$，再求出所有卡片上的数字之和，得到抽出的 3 张卡片上的数字之和应为$18$，列举出和为$18$的 3 张卡片即可求解.

【详解】从 8 张卡片中随机抽出 3 张，则样本空间中总的样本点数为$C_8^3=\frac{8\times7\times6}{3\times2}=56$，

因为$1+2+3+4+5+6+7+8=36$，

所以要使抽出的 3 张卡片上的数字之和与其余 5 张卡片上的数字之和相等，

则抽出的 3 张卡片上的数字之和应为$18$，

则抽出的 3 张卡片上的数字的组合有$8,7,3$或$8,6,4$或$7,6,5$共 3 种，

所以符合抽出的 3 张卡片上的数字之和为$18$的样本点个数共 3 个，

所以抽出的 3 张卡片上的数字之和与其余 5 张卡片上的数字之和相等的概率为$\frac{3}{56}$.

故答案为：$\frac{3}{56}$.

14．（2025年1月八省联考数学）已知曲线$C:y=x^3-\dfrac{2}{x}$，两条直线$l_1$、$l_2$均过坐标原点$O$，$l_1$和$C$交于$M$、$N$两点，$l_2$和$C$交于$P$、$Q$两点，若三角形$\triangle OPM$的面积为$\sqrt{2}$，则三角形$\triangle MNQ$的面积为____________.

【答案】$2\sqrt{2}$

【难度】0.65

【知识点】函数奇偶性的应用、函数对称性的应用、函数图象的应用、根据解析式直接判断函数的单调性

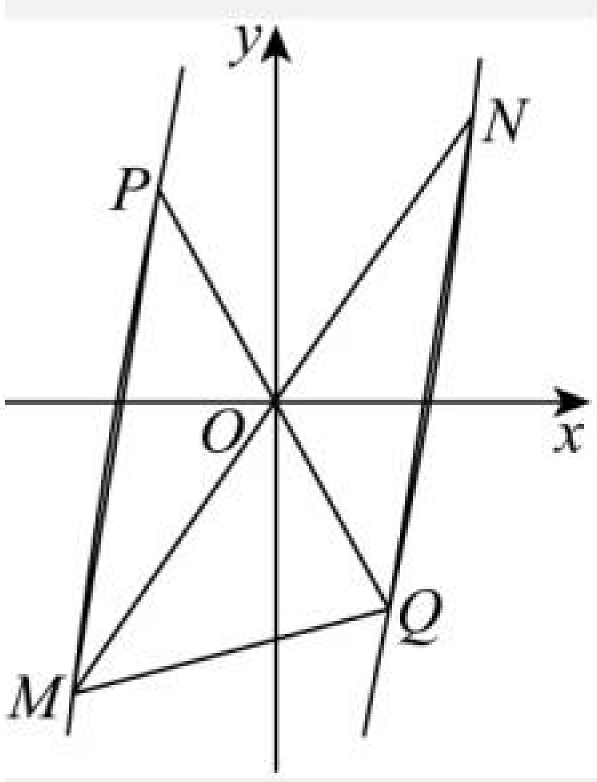
【分析】根据对称性，结合图象来求得正确答案.

【分析】根据对称性，结合图象来求得正确答案.

【详解】由于$(x,y)$和$(-x,-y)$都符合$y=x^3-\dfrac{2}{x},x\neq 0$，

所以曲线$C$的图象关于原点对称，当$x>0$时，函数$y=x^3-\dfrac{2}{x}$单调递增，

由此画出曲线$C$的大致图象如下图所示，




两条直线$l_1$、$l_2$均过坐标原点$O$，所以$M$、$N$两点关于原点对称，$P$、$Q$两点关于原点对称，

根据对称性，不妨设$M,N,P,Q$位置如图，

可知$|OP|=|OQ|,|OM|=|ON|$，$\angle POM=\angle QON$，

所以$\triangle OPM\cong\triangle OQN$，所以$S_{\triangle OQN}=S_{\triangle OPM}=\sqrt{2}$，

而$\triangle OQM$和$\triangle OQN$等底等高，面积相同，所以$S_{\triangle OQM}=\sqrt{2}$，

所以$S_{\triangle MNQ}=2\sqrt{2}$.

故答案为：$2\sqrt{2}$

【点睛】方法点睛：利用曲线对称性：充分利用曲线关于原点对称的性质，确定点的对称关系，这是解决本题的基础.通过对称关系，能够推导出相关线段和三角形之间的等量关系，为后续的面积计算提供依据.

15.（2025 年 1 月八省联考数学）为考察某种药物 A 对预防疾病 $B$ 的效果，进行了动物（单位：只）试验，得到如下列联表：

| 药物 | 疾病 | | 合计 |
|---|---|---|---|
| | 未患病 | 患病 | |
| 未服用 | 100 | 80 | $s$ |
| 服用 | 150 | 70 | 220 |
| 服用 | 150 | 70 | 220 |
| 合计 | 250 | $t$ | 400 |

(1)求 $s$，$t$；

(2)记未服用药物 A 的动物患疾病 $B$ 的概率为 $P$，给出 $P$ 的估计值；

(3)根据小概率值 $\alpha=0.01$ 的独立性检验，能否认为药物 A 对预防疾病 $B$ 有效?

附：$\chi^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，

| $P(\chi^2\geq k)$ | 0.050 | 0.010 | 0.001 |
|---|---|---|---|
| $k$ | 3.841 | 6.635 | 10.828 |

【答案】(1) $s=180$，$t=150$

(2) $\dfrac{4}{9}$

(3)能认为药物 A 对预防疾病 $B$ 有效

【难度】0.85

【知识点】完善列联表、卡方的计算、独立性检验解决实际问题、用频率估计概率

【分析】（1）根据列联表求和即可；

（2）用频率估计概率，计算即可；

（3）根据公式计算 $\chi^2$，然后根据临界值表分析判断即可.

【详解】（1）由列联表知 $s=100+80=180$，$t=80+70=150$；

（2）由列联表知，未服用药物 A 的动物有 $s=180$（只），

未服用药物 A 且患疾病 $B$ 的动物有 80（只），

所以未服用药物 A 的动物患疾病 $B$ 的频率为 $\dfrac{80}{180}=\dfrac{4}{9}$，

所以未服用药物 A 的动物患疾病 $B$ 的概率的估计值为 $P=\dfrac{4}{9}$；

（3）零假设为 $H_0$：药物 A 对预防疾病 $B$ 无效，

由列联表得到 $\chi^2=\dfrac{400(100\times70-150\times80)^2}{180\times220\times250\times150}=\dfrac{2000}{297}\approx6.734>6.635$，

根据小概率值 $\alpha=0.01$ 的独立性检验，推断 $H_0$ 不成立，

即认为药物 A 对预防疾病 $B$ 有效，该推断犯错误的概率不超过 0.01，

所以根据小概率值 $\alpha=0.01$ 的独立性检验，能认为药物 A 对预防疾病 $B$ 有效.

16．（2025 年 1 月八省联考数学）已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=3, a_{n+1}=\frac{3a_n}{a_n+2}$

(1)证明：数列$\left\{1-\frac{1}{a_n}\right\}$为等比数列；

(2)求$\{a_n\}$的通项公式；

(3)令$b_n=\frac{a_{n+1}}{a_n}$，证明: $b_n<b_{n+1}<1$.

【难度】0.65

【知识点】判断数列的增减性、由递推关系式求通项公式、由递推关系证明等比数列

【分析】(1) 根据题设条件化简，结合等比数列的定义即可证明；

(2) 由 (1) 求得数列$\left\{1-\frac{1}{a_n}\right\}$的通项公式，再求$a_n$即得；

(3) 将 (2) 中得到的$\{a_n\}$的通项代入$b_n=\frac{a_{n+1}}{a_n}$求得$b_n$，化简后利用数列的单调性即可得证.

【详解】(1) 由$a_{n+1}=\frac{3a_n}{a_n+2}$得$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{a_n+2}{3a_n}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{a_n}+\frac{1}{3}$，

则$1-\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{a_n}=\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{a_n}\right)$，

所以数列$\left\{1-\frac{1}{a_n}\right\}$是首项为$1-\frac{1}{a_1}=\frac{2}{3}$，公比为$\frac{2}{3}$的等比数列.

(2) 由 (1) 得$1-\frac{1}{a_n}=\frac{2}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}=\left(\frac{2}{3}\right)^n$，

解得：$a_n=\frac{1}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}=\frac{3^n}{3^n-2^n}$.

(3) $$b_n=\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{3^{n+1}}{3^{n+1}-2^{n+1}}\cdot\frac{3^n-2^n}{3^n}=\frac{3?(3^n-2^n)}{3^{n+1}-2^{n+1}}=\frac{3?\left(\frac{3}{2}\right)^n-3}{3?\left(\frac{3}{2}\right)^n-2}=\frac{3?\left(\frac{3}{2}\right)^n-2-1}{3?\left(\frac{3}{2}\right)^n-2}=1-\frac{1}{3\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^n-2}.$$

令$f(n)=3\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^n-2$，$n\in[1,+\infty)$，

因为$f(n)=3\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^n-2$在$n\in[1,+\infty)$上单调递增，则$f(n)\geq f(1)=3\times\frac{3}{2}-2=\frac{5}{2}>0$

所以数列$\left\{\frac{1}{3\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^n-2}\right\}$在$n\in N^*$上单调递减，从而数列$\{b_n\}$在$n\in N^*$上单调递增，且$b_n<1$，

故得$b_n<b_{n+1}<1$.

17.（2025 年 1 月八省联考数学）已知函数 $f(x)=a\ln x+\frac{b}{x}-x$.

(1)设 $a=1,b=-2$，求曲线 $y=f(x)$ 的斜率为 2 的切线方程;

(2)若 $x=1$ 是 $f(x)$ 的极小值点，求 b 的取值范围.

【答案】(1) $2x-y-5=0$

(2) $b>1$

【难度】0.65

【知识点】求在曲线上一点处的切线方程（斜率）、根据极值点求参数

【分析】（1）由切线斜率为 2，结合导数知识可得切线过点 $(1,-3)$，然后可得切线方程;

（2）由 $x=1$ 是 $f(x)$ 的极小值点，可得 $a=b+1$，然后据此讨论 $f(x)$ 的单调性，分析得 $f(x)$ 在 $x=1$ 时的极值情况，从而得解.

【详解】（1）当 $a=1,b=-2$ 时，$f(x)=\ln x-\frac{2}{x}-x$，其中 $x>0$，

则 $f'(x)=\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}-1=\frac{x-x^2+2}{x^2}$，令 $f'(x)=2\Rightarrow\frac{x-x^2+2}{x^2}=2$，

化简得 $3x^2-x-2=(x-1)(3x+2)=0$，解得 $x=1$（负值舍去），

又此时 $f(1)=-3$，则切线方程过点 $(1,-3)$，结合切线方程斜率为 2，

则切线方程为 $y+3=2(x-1)$，即 $2x-y-5=0$.

（2）由题可得 $f(x)$ 定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=\frac{a}{x}-\frac{b}{x^2}-1=\frac{-x^2+ax-b}{x^2}$，

因 $x=1$ 是 $f(x)$ 的极小值点，则 $f'(1)=-1+a-b=0\Rightarrow a=b+1$，

则 $f'(x)=\frac{-x^2+(b+1)x-b}{x^2}=-\frac{(x-1)(x-b)}{x^2}$，

若 $b\le0$，令 $f'(x)>0\Rightarrow x\in(0,1)$，令 $f'(x)<0\Rightarrow x\in(1,+\infty)$，

则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，

得 $x=1$ 是 $f(x)$ 的极大值点，不满足题意;

若 $0<b<1$，令 $f'(x)>0\Rightarrow x\in(b,1)$，令 $f'(x)<0\Rightarrow x\in(0,b)\cup(1,+\infty)$，

则 $f(x)$ 在 $(b,1)$ 上单调递增，在 $(0,b),(1,+\infty)$ 上单调递减，

得 $x=1$ 是 $f(x)$ 的极大值点，不满足题意;

若 $b=1$，则 $f'(x)=-\frac{(x-1)^2}{x^2}<0$，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，无极值，不满足题意;

若 $b>1$，令 $f'(x)>0\Rightarrow x\in(1,b)$，令 $f'(x)<0\Rightarrow x\in(0,1)\cup(b,+\infty)$，

则 $f(x)$ 在 $(1,b)$ 上单调递增，在 $(0,1),(b,+\infty)$ 上单调递减，

得 $x=1$ 是 $f(x)$ 的极小值点，满足题意;

综上，$x=1$ 是 $f(x)$ 的极小值点时，$b>1$.

18.（2025 年 1 月八省联考数学）已知椭圆 $C$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$，左、右焦点分别为 $F_1(-1,0)$，$F_2(1,0)$

(1)求 $C$ 的方程；

(2)已知点 $M_0(1,4)$，证明：线段 $F_1M_0$ 的垂直平分线与 $C$ 恰有一个公共点；

(3)设 $M$ 是坐标平面上的动点，且线段 $F_1M$ 的垂直平分线与 $C$ 恰有一个公共点，证明 $M$ 的轨迹为圆，并求该圆的方程.

（1）由题意知 $\begin{cases} \frac{c}{a}=\frac{1}{2} \\ c=1 \\ a^2=b^2+c^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=\sqrt{3} \end{cases}$ $C$的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

（2）设$F_1M_0$中点为 P, $\therefore P(0,2), k_{F_1M_0}=2$, $\therefore F_2M_0$的中垂线方程为 $y=-\frac{1}{2}x+2$

$\begin{cases} y=-\frac{1}{2}x+2 \\ 3x^2+4y^2=12 \end{cases} \Rightarrow 3x^2+4\left(\frac{1}{4}x^2-2x+4\right)=12 \therefore\ 4x^2-8x+4=0$ 即 $x^2-2x+1=0$

$\therefore (x-1)^2=0$ $\therefore F_1M_0$的垂直平分线与 C 恰有一个公共点.

$\therefore F_1M$与$C$公共点只有一个为$\left(1,\frac{3}{2}\right)$

（3）设$\alpha(x_0,y_0)$ 切线$\frac{x_0x}{4}+\frac{y_0y}{3}=1$ （阅卷要求需要证明出来，十二月第二周讲光学性质时我们讲过，请回看视频或者笔记，隐函数求导不得分、点斜式联立德尔塔等于零，得 K 值，再代回得切线方程，为证，超纲证扣三分，我反复强调的，高二高三的都给我注意点）即

$3x_0x+4y_0y=12$ $F_1M: y=\frac{4y_0}{3x_0}(x+1)$ 即 $3x_0y-4y_0x=4y_0$

$\therefore 9x_0^2x^2+16y_0^2y^2+24x_0y_0xy=144$ $\therefore 9x_0^2y^2+16y_0^2x^2-24x_0y_0xy=16y_0^2$

$\therefore\ (9x_0^2+16y_0^2)(x^2+y^2)=144+16y_0^2$ $\therefore \frac{x_0^2}{4}+\frac{y_0^2}{3}=1$ $\therefore 144=36x_0^2+48y_0^2$

$\therefore (9x_0^2+16y_0^2)(x^2+y^2)=36x_0^2+64y_0^2$ $\therefore x^2+y^2=4$

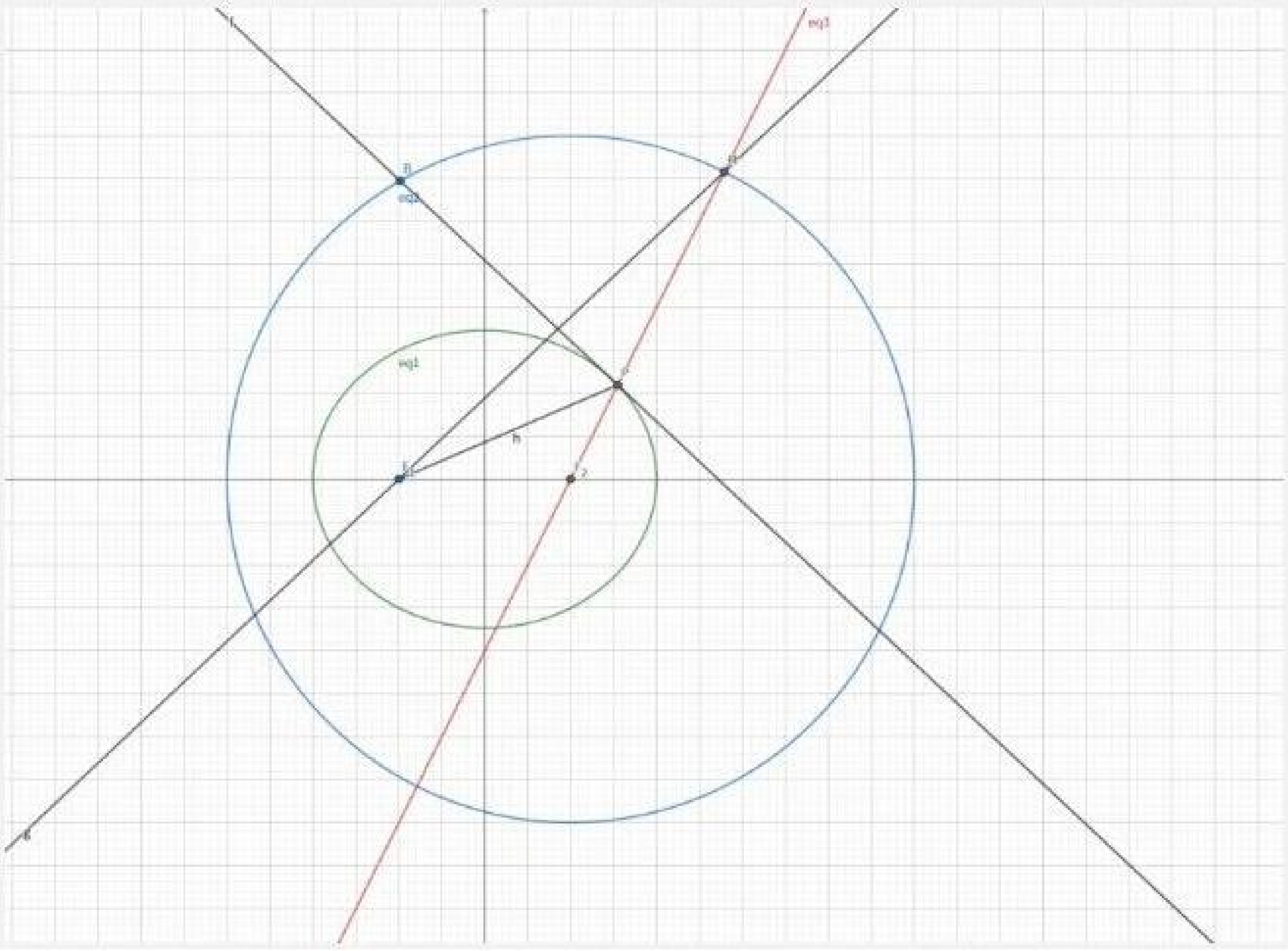
$\therefore x_M=2_T+1, y_M=2y_T$ $\left(\frac{x_M-1}{2}\right)^2+\left(\frac{y_M}{2}\right)^2=4$ $M$轨迹$(x-1)^2+y^2=16$

MST 解法：

若 M、P、$F_2$不共线，设 M、A、$F_2$共线 $MF_2=MA+AF_2=AF_1+AF_2>2a$

$MP+PF_2=PF_1+PF_2=2a$（中垂线性质）则 $MP+PF_2<MF_2$(矛盾).

$\therefore$ M、P、$F_2$共线 $\therefore M$轨迹$(x-1)^2+y^2=16$



19.（2025 年 1 月八省联考数学）在平面四边形 ABCD 中，$AB=AC=CD=1$，$\angle ADC=30°,\angle DAB=120°$，将$\triangle ACD$沿 AC 翻折至$\triangle ACP$，其中 P 为动点.

(1)设$PC\perp AB$，三棱锥$P-ABC$的各个顶点都在球 O 的球面上.

（i）证明：平面$PAC\perp$平面$ABC$；

（ii）求球 O 的半径

(2)求二面角$A-CP-B$的余弦值的最小值.

解：$\because PC\perp AB, AB\perp AC$ $\therefore AB\perp$面$PAC$ $\therefore$面$ABC\perp$面$PAC$

找$\Delta ACP$的外心$O'$，易知$O'P=O'A=1$ 过$O$作面$ACP$垂线

设外接球球心为$O$ 由$OB=OA$可知，$OO'=\frac{1}{2}, \therefore R=\frac{\sqrt{5}}{2}$

$B(1,0,0), C(0,1,0), P(x,y,z) \because PA=\sqrt{3}, \therefore x^2+y^2+z^2=3$

又$\because PC=1, \therefore x^2+(y-1)^2+z^2=1 \therefore y=\frac{3}{2}, x^2+z^2=\frac{3}{4}$

面$ACP$法向量为$\overrightarrow{n_1}=(z,0,-x)$ 面$BCP$法向量$\overrightarrow{n_2}=(z,z,x-y+1)$

$\therefore \cos\theta=\frac{x^2+z^2+xy-x}{\sqrt{x^2+z^2}\cdot\sqrt{z^2+2xy-2x-2y+4}}=\frac{\frac{3}{4}+\frac{1}{2}x}{\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{-x^2+x+\frac{7}{4}}}$ 右端求导可知，当$x=-\frac{1}{2}$时，$\cos\theta$最小

$\therefore \cos\theta\geq\frac{\sqrt{3}}{3}$，当$P$转到$\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$时取得最小值