

工作秘密 严禁外传
擅自泄露 严肃追责

成都市 2022 级高中毕业班第三次诊断性检测

数 学

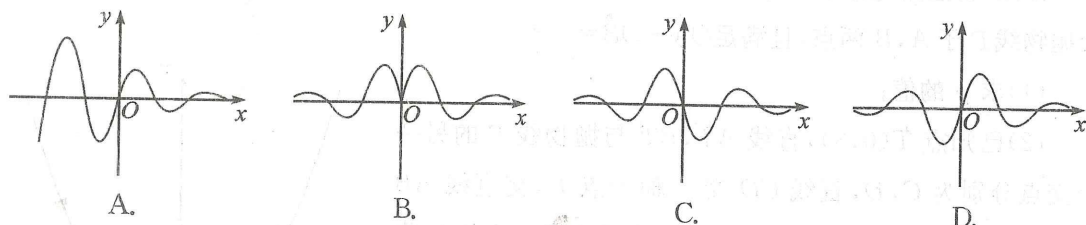
本试卷满分 150 分,考试时间 120 分钟。

注意事项:

1. 答题前,务必将自己的姓名、考籍号填写在答题卡规定的位置上。
2. 答选择题时,必须使用 2B 铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑,如需改动,用橡皮擦擦干净后,再选涂其它答案标号。
3. 答非选择题时,必须使用 0.5 毫米黑色签字笔,将答案书写在答题卡规定的位置上。
4. 所有题目必须在答题卡上作答,在试题卷上答题无效。
5. 考试结束后,只将答题卡交回。

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x | 1 < x < 3\}$, $B = \{x | x < m\}$,若 $A \subseteq B$,则实数 m 的取值范围是
A. $\{m | m \leq 1\}$ B. $\{m | m \geq 1\}$ C. $\{m | m \leq 3\}$ D. $\{m | m \geq 3\}$
2. 在复平面内,复数 z 对应的点的坐标是 $(-2, 1)$,则 z 的共轭复数对应的点位于
A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限
3. 设 $x \in \mathbb{R}$,则“ $\cos x = 1$ ”是“ $\sin x = 0$ ”的
A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
4. 函数 $f(x) = \frac{\sin \pi x}{e^x + e^{-x}}$ 的部分图象大致为



5. 已知动圆 C 与圆 $(x+1)^2 + y^2 = 1$ 外切,同时与圆 $(x-1)^2 + y^2 = 25$ 内切,则动圆 C 的圆心轨迹方程为
A. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$ B. $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$ C. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{24} = 1$ D. $\frac{x^2}{25} + y^2 = 1$
6. 已知正四棱台的上底面边长为 4,下底面边长为 8,侧棱长为 $\sqrt{17}$,则其体积为
A. 108 B. 112 C. 120 D. 124
7. 已知实数 x, y 满足 $2^x = 3^y$,则下列不等式一定成立的是
A. $x + y \geq 2\sqrt{xy}$ B. $(x+y)(x-y) \geq 0$
C. $0 \leq xy \leq 1$ D. $xy \leq |x+y|$

8. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = \frac{2\pi}{3}$, $\angle BAC$ 的角平分线 AD 交 BC 于点 D ,若 $CD = \sqrt{6} AB$,则 $\tan \angle ABC =$

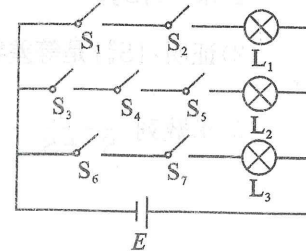
A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{2}{3}$ C. 1 D. $\sqrt{2}$

二、选择题:本题共 3 小题,每小题 6 分,共 18 分。在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分,部分选对的得部分分,有选错的得 0 分。

9. 已知某地社交媒体用户的日活跃时长 X (单位:小时)服从正态分布 $N(2.4, 0.7^2)$,则
A. $E(X) = 2.4, D(X) = 0.7^2$
B. 若 $P(X \leq 1) = P(X \geq b)$,则 $b = 3$
C. $P(X \leq 0.3) + P(X \geq 4.5) < P(0.3 < X < 4.5)$
D. $P(|X - 2| \leq 0.7) \geq P(|X - 3| \leq 0.7)$
10. 对于空间中一组向量 $a_i (i = 1, 2, 3)$,若存在不全为零的实数 $k_i (i = 1, 2, 3)$ 使得 $k_1 a_1 + k_2 a_2 + k_3 a_3 = 0$,则称这组向量线性相关,否则称这组向量线性无关。则
A. 若 $a = (-1, 1, 1), b = (-2, 2, 2), c = (3, 1, -4)$,则 a, b, c 线性相关
B. 若 $a = (-1, 1, 1), b = (1, 2, 3), c = (2, 3, 4)$,则 a, b, c 线性无关
C. 若 a_1, a_2, a_3 线性无关,则 $a_1 - a_2, 2a_1 - 3a_2, a_3 - a_1$ 线性相关
D. 对于非零向量 a_1, a_2, a_3 ,若存在实数 x, y 使得 $a_1^2 = xa_1 \cdot a_2 + ya_1 \cdot a_3$,则 a_1, a_2, a_3 线性相关
11. 声音是由于物体的振动产生的能引起听觉的波,我们听到的声音一般都是纯音合成的复合音。已知纯音的数学模型是函数 $y = A \sin \omega x$ 。复合音的产生是因为发声体在全段振动,产生频率为 f 的基音的同时,其各部分,如二分之一、三分之一、四分之一部分也在振动,产生的频率恰好是全段振动频率的倍数,如 $2f, 3f, 4f$ 等。即我们听到的声音的函数是 $f_n(x) = \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x + \dots + \frac{1}{n} \sin nx$ 。则
A. $f_n(x)$ 的图像关于 $(k\pi, 0) (k \in \mathbb{Z})$ 对称
B. $f_3(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上有 2 个极大值点,1 个极小值点
C. $\{y | y = f_3(x)\} \subseteq \{y | y = f_2(x)\}$
D. $f_n(x) > 0$ 在 $(2k\pi, \pi + 2k\pi) (k \in \mathbb{Z})$ 上恒成立

三、填空题:本题共 3 小题,每小题 5 分,共 15 分。

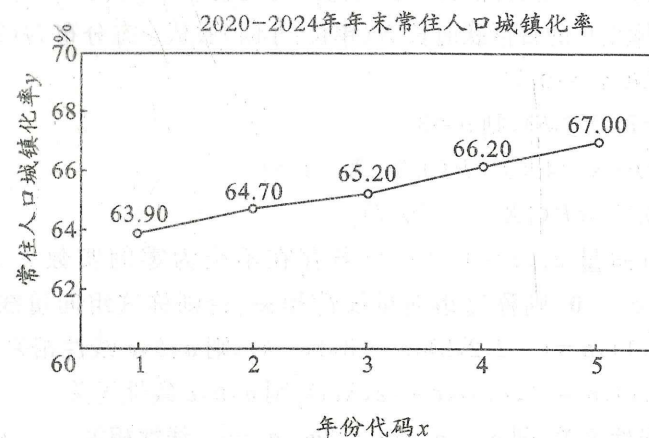
12. 双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ 的离心率为_____。
13. 若函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x, & x \leq 0, \\ x^3 - 3x + a, & x > 0 \end{cases}$ 的值域为 $[-1, +\infty)$,则实数 a 的取值范围是_____。
14. 如图,一电路中, $S_i (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$ 为未闭合的开关, $L_j (j = 1, 2, 3)$ 为能正常工作的灯泡,现每次等可能地闭合一个未闭合的开关,直到 7 个开关全部闭合,则 L_1 最先亮起的概率为_____。



四、解答题:本题共5小题,共77分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. (13分)

随着粤港澳大湾区建设、黄河流域生态保护和高质量发展等区域重大战略实施取得新成效,城乡融合和区域协调发展继续推进,2024年末全国常住人口城镇化率增长至67.00%。下图为2020—2024年年末常住人口城镇化率的折线图。



注:年份代码1—5分别对应年份2020—2024

(1)由折线图看出,可用线性回归模型拟合常住人口城镇化率 y 与年份代码 x 的关系。请建立 y 关于 x 的回归方程;

(2)从这5年中任取2年,记常住人口城镇化率超过65.00%的年数为 X ,求 X 的分布列与数学期望。

附:回归方程 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ 中斜率和截距的最小二乘法公式分别为: $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$,

$$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}.$$

16. (15分)

已知正项数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项的和为 S_n , 且 $a_n(2S_n - a_n) = 1$.

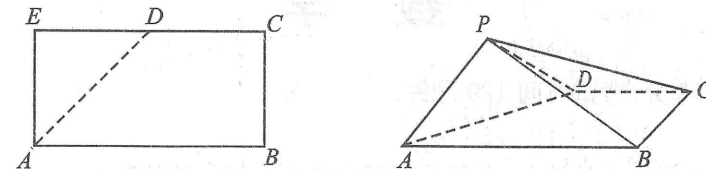
(1)求 S_1, S_2 ;

(2)证明: $\{S_n^2\}$ 是等差数列;

(3)求数列 $\left\{\frac{1}{S_n + S_{n+1}}\right\}$ 的前 n 项的和 T_n .

17. (15分)

如图,在矩形 $ABCE$ 中, $AB=2, BC=1$, D 为 EC 中点,将 $\triangle EAD$ 沿 AD 翻折至 $\triangle PAD$, 使得 $PB=PC$.



(1)证明:平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$;

(2)线段 PB 上是否存在一点 T , 使得 AT 与平面 PAD 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{6}$, 若存在, 求出 $\frac{PT}{TB}$ 的值; 若不存在, 请说明理由。

18. (17分)

已知函数 $f(x) = ax^2 + (a-2)x - \ln x$.

(1)讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2)若 $f(x)$ 有两个零点, $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数.

(i)求实数 a 的取值范围;

(ii)记 $f(x)$ 较小的一个零点为 x_0 . 证明: $x_0 f'(x_0) > -2$.

19. (17分)

如图,在直角坐标系 xOy 中,已知 F 是抛物线 $\Gamma: x^2 = 2py (p > 0)$ 的焦点,过点 F 的直线交抛物线 Γ 于 A, B 两点,且满足 $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = -3$.

(1)求 p 的值;

(2)已知点 $T(0, 3)$, 直线 AT, BT 与抛物线 Γ 的另一个交点分别为 C, D , 直线 CD 交 y 轴于点 P , 交直线 AB 于点 N . 抛物线 Γ 在 C, D 处的切线交于点 K , 过点 P 作平行于 x 轴的直线, 分别交直线 KD, KC 于点 E, G .

(i)求证:点 P 为定点;

(ii)记 $\triangle ENK, \triangle GNK$ 的面积分别为 S_1, S_2 , 求 $S_1 + S_2$ 的最小值。

