成都市2022级高中毕业班第三次诊断性检测

数学参考答案及评分意见

一、选择题:(每小题5分,共40分)

1. D;　2. C;　3. A;　4. D;　5. A;　6. B;　7. B;　8. C.

二、选择题:(每小题6分,共18分)

9. ACD;　10. AB;　11. ABD.

三、填空题:(每小题5分,共15分)

12. 2;　13. $[1,+\infty)$;　14. $\frac{27}{70}$.

四、解答题:(共77分)

15. 解:(1)设年份代码的平均数为 $\bar{x}$,则 $\bar{x}=3$. ……1分

设常住人口城镇化率的平均数为 $\bar{y}$,则 $\bar{y}=\frac{63.9+64.7+65.2+66.2+67.0}{5}=65.4$.

……2分

因为 $\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2=(-2)^2+(-1)^2+0^2+1^2+2^2=10$, ……3分

$\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})=-2\times(-1.5)+(-1)\times(-0.7)+0\times(-0.2)+1\times0.8+2\times1.6=7.7$,

……5分

所以 $\hat{b}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}=\frac{7.7}{10}=0.77$. ……6分

所以 $\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=65.4-0.77\times3=65.4-2.31=63.09$.

所以 y 关于 x 的回归方程为 $\hat{y}=0.77x+63.09$. ……7分

(2)由题意可知,X 的取值可能为 $0,1,2$, ……8分

因为 $P(X=0)=\frac{C_3^0C_2^2}{C_5^2}=\frac{1}{10}$; ……9分

$P(X=1)=\frac{C_3^1C_2^1}{C_5^2}=\frac{3}{5}$; ……10分

$P(X=2)=\frac{C_3^2C_2^0}{C_5^2}=\frac{3}{10}$. ……11分

所以 X 的分布列为:

X	0	1	2
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$

所以 X 的数学期望为 $E(X)=0\times\frac{1}{10}+1\times\frac{3}{5}+2\times\frac{3}{10}=\frac{6}{5}$. ……13 分

16. 解：(1)由 $a_n(2S_n-a_n)=1$，

令 $n=1$，有 $a_1^2=1$，因为 $a_n>0$，所以 $a_1=1$. ……2 分

令 $n=2$，有 $a_2(a_2+2a_1)=1$，即 $a_2^2+2a_2=1$，由 $a_2>0$，

解得 $a_2=\sqrt{2}-1$. 所以 $S_1=1$，$S_2=\sqrt{2}$. ……4 分

(2)当 $n\geqslant 2$ 时，由 $a_n=S_n-S_{n-1}$， ……6 分

代入 $a_n(2S_n-a_n)=1$，

化简得 $(S_n-S_{n-1})(S_n+S_{n-1})=1$，即 $S_n^2-S_{n-1}^2=1(n\geqslant 2)$， ……8 分

所以 $\{S_n^2\}$ 是首项为 1，公差为 1 的等差数列. ……9 分

(3)由(2)可知 $S_n^2=n$.

因为 $\{a_n\}$ 是正项数列，所以 $S_n>0$，从而 $S_n=\sqrt{n}$. ……11 分

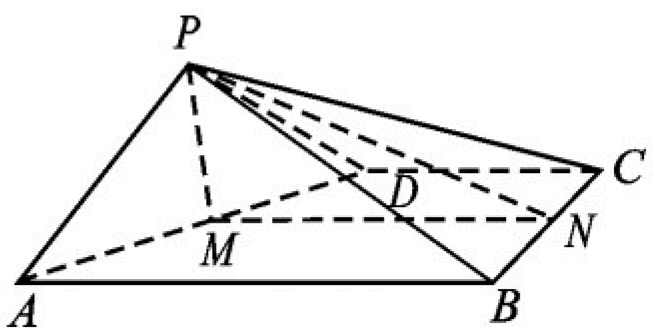
由 $\frac{1}{S_n+S_{n+1}}=\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$， ……13 分

所以 $T_n=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\sqrt{n+1}-1$.

所以数列 $\left\{\frac{1}{S_n+S_{n+1}}\right\}$ 的前 n 项的和 $T_n=\sqrt{n+1}-1$. ……15 分

17. 解：(1)如图，设线段 AD 的中点为 M，线段 BC 的中点为 N，

连接 PM，MN，PN.



因为 D 为 EC 中点，所以 $PD=PA=1$.

又因为 PM 是等腰 $\triangle PAD$ 底边上的中线，所以 $PM\perp AD$. ……1 分

同理可得 $PN\perp BC$. ……2 分

因为 $ABCE$ 是矩形，所以 $CD//AB$，$AB\perp BC$.

因为 M，N 是中点，所以 MN 是梯形 $ABCD$ 的中位线.

所以 $MN//AB$，从而 $MN\perp BC$. ……3 分

因为 $MN\subset$ 平面 PMN，$PN\subset$ 平面 PMN，$MN\cap PN=N$，

所以 $BC\perp$ 平面 PMN. ……4 分

因为 $PM\subset$ 平面 PMN，所以 $BC\perp PM$.

因为 $AD\subset$ 平面 $ABCD$，$BC\subset$ 平面 $ABCD$，AD 和 BC 相交，

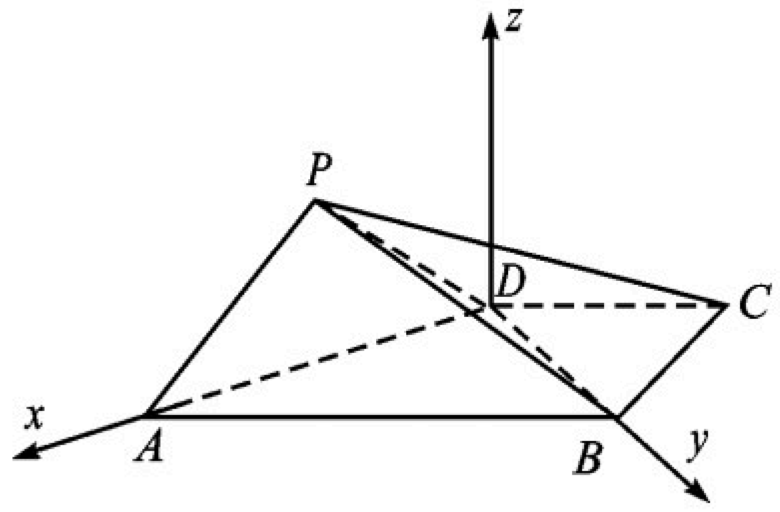
所以 $PM\perp$平面 $ABCD$.

因为 $PM\subset$平面 PAD,所以平面 $PAD\perp$平面 $ABCD$. ……6 分

(2)易得 $AD\perp BD$.由(1)可知 $PM\perp$平面 $ABCD$,所以 $PM\perp BD$.

因为 $AD\subset$平面 PAD,$PM\subset$平面 PAD,$PM\cap AD=M$,

所以 $BD\perp$平面 PAD.



以 D 为坐标原点,$\overrightarrow{DA}$的方向为 x 轴正方向,建立如图所示空间直角坐标系 $D-xyz$,

则 $A(\sqrt{2},0,0)$,$B(0,\sqrt{2},0)$,$P(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2})$,

$\overrightarrow{AB}=(-\sqrt{2},\sqrt{2},0)$,$\overrightarrow{AP}=(-\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2})$. ……9 分

设$\frac{PT}{TB}=\lambda>0$,则$\overrightarrow{AT}=\frac{\lambda}{1+\lambda}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{1+\lambda}\overrightarrow{AP}$.

可得$\sqrt{2}(1+\lambda)\overrightarrow{AT}=(-2\lambda-1,2\lambda,1)$. ……11 分

由 $BD\perp$平面 PAD,得平面 PAD 的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(0,1,0)$. ……13 分

设直线 AT 与平面 PAD 所成角为θ,

则 $\sin\theta=|\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{AT}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AT}|}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{AT}|}=\frac{2\lambda}{\sqrt{(-2\lambda-1)^2+(2\lambda)^2+1}}=\frac{\sqrt{6}}{6}$, ……14 分

化简得 $8\lambda^2-2\lambda-1=0$,解得 $\lambda=\frac{1}{2}$或 $\lambda=-\frac{1}{4}$(舍).

所以当$\frac{PT}{TB}=\frac{1}{2}$时,直线 AT 与平面 PAD 所成角的正弦值为$\frac{\sqrt{6}}{6}$. ……15 分

18. 解:(1)函数 $f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$,

$f'(x)=2ax+(a-2)-\frac{1}{x}=\frac{(ax-1)(2x+1)}{x}$, ……1 分

①当 $a\leqslant 0$ 时,$f'(x)<0$,函数 $f(x)$在$(0,+\infty)$单调递减; ……3 分

②当 $a>0$ 时,令 $f'(x)=0$,解得 $x=\frac{1}{a}$,

当 $x\in(0,\frac{1}{a})$时,$f'(x)<0$,函数 $f(x)$单调递减;

当 $x\in(\frac{1}{a},+\infty)$时,$f'(x)>0$,函数 $f(x)$单调递增.

综上所述,当 $a\leqslant 0$ 时,函数 $f(x)$在$(0,+\infty)$单调递减;

当 $a>0$ 时,函数 $f(x)$在$(0,\frac{1}{a})$上单调递减,在$(\frac{1}{a},+\infty)$单调递增. ……5 分

(2)(i)若 $a\leqslant 0$,由(1)知,$f(x)$至多有一个零点; ……6 分

若 $a>0$,由(1)知,当 $x=\frac{1}{a}$时,$f(x)$取得最小值,最小值为 $f(\frac{1}{a})=1-\frac{1}{a}+\ln a$.

因为当 $x\to+\infty$时,$f(x)\to+\infty$;当 $x\to 0^{+}$时,$f(x)\to+\infty$,

所以函数 $f(x)$有两个零点当且仅当 $f(\frac{1}{a})<0$. ……8 分

设 $g(a)=\ln a-\frac{1}{a}+1$,函数 $g(a)$在$(0,+\infty)$单调递增.

因为 $g(1)=0$,$g(a)<0$ 的解集为 $a\in(0,1)$.

综上所述,a 的取值范围是$(0,1)$. ……10 分

(ii)因为 $f(x)=(x^2+x)a-2x-\ln x$,

由 $f(1)=2a-2<0$,结合(i)知 $0<x_0<1$,

要证 $x_0f'(x_0)>-2$,即证$(2x_0+1)(ax_0-1)>-2$,即 $ax_0(2x_0+1)>2x_0-1$,

当 $0<x_0\leqslant\frac{1}{2}$时,因为 $ax_0(2x_0+1)>0$,$2x_0-1\leqslant 0$,不等式恒成立; ……12 分

当$\frac{1}{2}<x_0<1$ 时,由 $f(x_0)=0$ 得 $ax_0(x_0+1)=\ln x_0+2x_0$.

即证$(2x_0+1)(\ln x_0+2x_0)>(2x_0-1)(x_0+1)$.

即证 $\ln x_0>\frac{(2x_0-1)(x_0+1)}{2x_0+1}-2x_0=\frac{-2x_0^2-x_0-1}{2x_0+1}=-x_0-\frac{1}{2x_0+1}$.

即证 $\ln x_0+x_0+\frac{1}{2x_0+1}>0$. ……14 分

设 $p(x)=\ln x+x+\frac{1}{2x+1}$,$x\in(\frac{1}{2},1)$,

由 $p'(x)=\frac{1}{x}+1-\frac{2}{(2x+1)^2}>\frac{1}{x}+1-\frac{2}{(2\times\frac{1}{2}+1)^2}>0$,

所以 $p(x)$在$(\frac{1}{2},1)$单调递增.

所以 $p(x)>p(\frac{1}{2})=-\ln 2+1>0$,故原不等式成立.

所以 $x_0f'(x_0)>-2$. ……17 分

19. 解：(1)由题意，直线 AB 斜率必存在，设 $AB: y=kx+\frac{p}{2}$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

联立 $\begin{cases} y=kx+\frac{p}{2}, \\ x^2=2py \end{cases}$ 得 $x^2-2pkx-p^2=0$，$\Delta=4p^2(k^2+1)>0$.

所以 $x_1+x_2=2pk$，$x_1x_2=-p^2$. ……2 分

由 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=x_1x_2+\frac{1}{4p^2}x_1^2x_2^2=-p^2+\frac{p^2}{4}=-3$.

解得 $p=2$ 或 $p=-2$(舍).

所以 $p=2$. ……4 分

(2)(i)直线 AC 斜率必存在，设 $AC: y=k_1x+3$，$C(x_3,y_3)$，$D(x_4,y_4)$，

联立 $\begin{cases} x^2=4y, \\ y=k_1x+3 \end{cases}$ 得 $x^2-4k_1x-12=0$，所以 $x_1x_3=-12$.

同理 $x_2x_4=-12$. ……6 分

又因为 $x_1x_2=-4$，所以 $x_3x_4=-36$. ……7 分

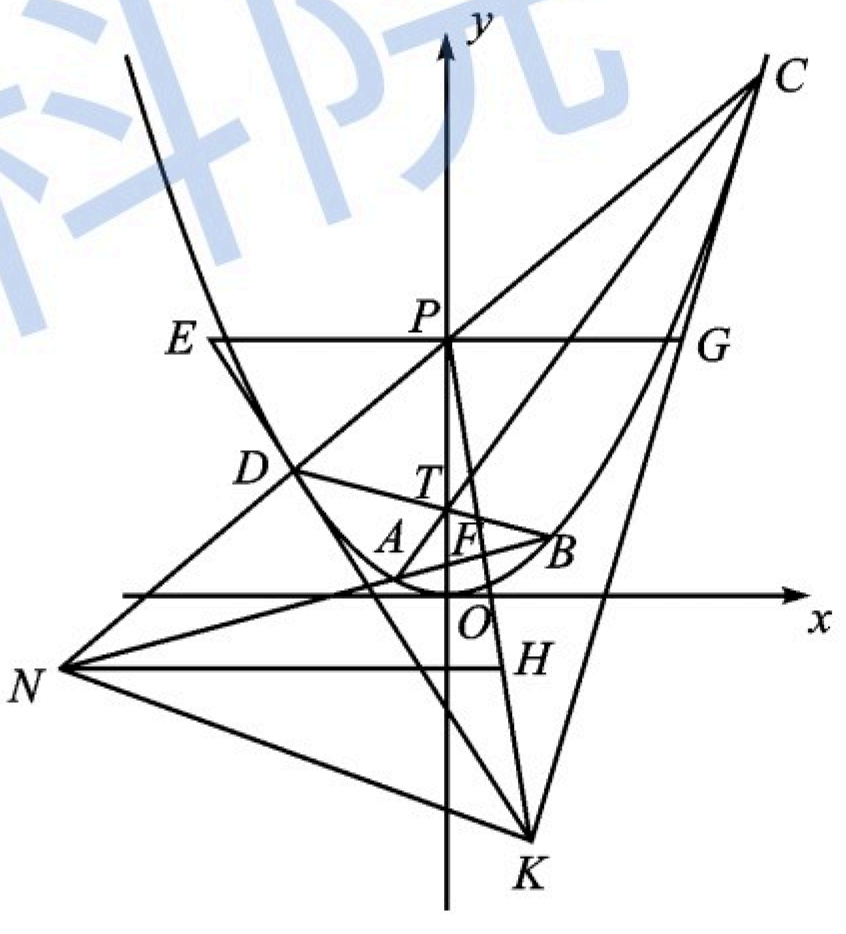
直线 CD 斜率必存在，设 $CD: y=k_2x+m$，

联立 $\begin{cases} x^2=4y, \\ y=k_2x+m \end{cases}$ 得 $x^2-4k_2x-4m=0$，

所以 $x_3x_4=-4m=-36$.

解得 $m=9$，所以直线 CD 过定点 $(0,9)$.

即 P 的坐标为 $(0,9)$. ……9 分



(ii)由 $k_{CD}=\frac{y_3-y_4}{x_3-x_4}=\frac{x_3+x_4}{4}$，且 $x_1x_3=x_2x_4=-12$，$x_1x_2=-4$，

得 $k_{CD}=\frac{x_3+x_4}{4}=\frac{1}{4}(\frac{-12}{x_1}-\frac{12}{x_2})=\frac{3}{4}(x_1+x_2)=3k$.

所以直线 CD 的方程为 $y=3kx+9$.

由直线 CD 与直线 AB 相交，可得 $k\neq 0$.

联立 $\begin{cases} y=3kx+9, \\ y=kx+1 \end{cases}$ 解得 $N(-\frac{4}{k},-3)$. ……11 分

因为抛物线方程为 $y=\frac{x^2}{4}$，所以 $y'=\frac{x}{2}$.

抛物线在点 C 处切线方程为 $y=\frac{x_3}{2}(x-x_3)+y_3=\frac{x_3}{2}x-\frac{1}{4}x_3^2$.

所以 $E(\frac{18}{x_3}+\frac{x_3}{2},9)$.

同理 $G(\frac{18}{x_4}+\frac{x_4}{2},9)$.

又 $\frac{18}{x_3}+\frac{x_3}{2}+\frac{x_4}{2}+\frac{18}{x_4}=\frac{18(x_3+x_4)}{x_3x_4}+\frac{x_3+x_4}{2}=0$,

所以 EG 的中点为 P. ……13 分

联立 $\begin{cases} y=\frac{x_3}{2}x-\frac{1}{4}x_3^2, \\ y=\frac{x_4}{2}x-\frac{1}{4}x_4^2 \end{cases}$ 得 $K(\frac{x_3+x_4}{2},\frac{x_3x_4}{4})$,

由 $x_3+x_4=3(x_1+x_2)$ 及 $x_3x_4=-36$，所以 $K(6k,-9)$. ……15 分

过 N 作平行于 x 轴的直线交 PK 于点 H，则 $H(4k,-3)$.

所以 $S_1+S_2=2S_{\triangle PNK}=|HN|\cdot(y_P-y_K)=|x_N-x_H|\cdot(y_P-y_K)$

$$=18|4k+\frac{4}{k}|=72(|k|+\frac{1}{|k|})\geqslant 144\sqrt{|k|\cdot\frac{1}{|k|}}=144.$$

当且仅当 $|k|=1$ 时，即直线 AB 方程为 $y=x+1$ 或 $y=-x+1$ 时等号成立. ……17 分