2025年全国统一高考数学试卷（新高考II）

参考答案

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 2，8，14，16，20 平均数为（　　）

A. 8　　B. 9　　C. 12　　D. 18

【答案】C

【解答】$\bar{x}=\dfrac{2+8+14+16+20}{5}=12$

2. $z=1+i$，$\dfrac{1}{z-1}=$（　　）

A. $-i$　　B. i　　C. -1　　D. 1

【答案】A

【解答】$\dfrac{1}{z-1}=\dfrac{1}{1+i-1}=\dfrac{1}{i}=-i$.

3. $A=\{-4,0,1,2,8\}$　$B=\{x\mid x^3=x\}$，$A\cap B=$（　　）

A. $\{0,1,2\}$　　B. $\{1,2,8\}$　　C. $\{2,8\}$　　D. $\{0,1\}$

【答案】D

【解答】$B=\{x\mid x(x-1)(x+1)=0\}=\{0,-1,1\}$，$A\bigcap B=\{0,1\}$.

4. $\dfrac{x-4}{x-1}\geq 2$解集是（　　）

A. $\{x\mid -2\leq x\leq 1\}$　　B. $\{x\mid x\leq -2\}$　　C. $\{x\mid -2\leq x<1\}$　　D. $\{x\mid x>1\}$

【答案】C

【解答】

$$\frac{x-4}{x-1}\geq 2\Leftrightarrow \frac{x-4}{x-1}-2\geq 0\Leftrightarrow \frac{-x-2}{x-1}\geq 0\Leftrightarrow -(x+2)(x-1)\geq 0\text{且}x-1\neq 0\Leftrightarrow -2\leq x<1.$$

5. $\triangle ABC$，$BC=2$，$AC=1+\sqrt{3}$，$AB=\sqrt{6}$，$A=$（　　）

A. 45°　　B. 60°　　C. 120°　　D. 135°

【答案】A

【解答】由余弦定理

$$\cos A=\frac{AC^2+AB^2-BC^2}{2AC\cdot AB}=\frac{(1+\sqrt{3})^2+(\sqrt{6})^2-2^2}{2\times(1+\sqrt{3})\times\sqrt{6}}=\frac{2(\sqrt{3}+3)}{2\sqrt{2}(\sqrt{3}+3)}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$A\in(0,\pi)$，故 $A=\frac{\pi}{4}$.

6. 抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 焦点 F，$A\in C$，过 A 作 C 准线的垂线，垂足为 B.若 $l_{BF}:y=-2x+2$，则 $|AF|=$（　　）

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

【答案】C

【解答】$l_{BF}:y=-2x+2$ 与 x 轴交于 F 点，则 $F(1,0)$，

故 $\frac{p}{2}=1\Leftrightarrow p=2\Leftrightarrow C:y^2=4x$ ；

设 $l_{BF}:y=-2x+2$ 与 y 轴交于 N 点，则 $N(0,2)$；

准线与 x 轴交于 M 点，由 $\triangle FON\sim\triangle FMB$，$MB=2NO=4$，故 $y_A=4$，

代入 $C:y^2=4x$ 得 $x_A=4$，$A(4,4)$，$|AF|=\sqrt{(4-1)^2+4^2}=5$

7. S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和，$S_3=6$，$S_5=-5$，$S_6=$（　　）

A. -20　　B. -15　　C. -10　　D. -5

【答案】B

【解答】S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，故 $\{\frac{S_n}{n}\}$ 为等差数列，该等差数列的公差为 d_1

$$\frac{S_5}{5}-\frac{S_3}{3}=2d_1\Rightarrow d_1=-\frac{3}{2}\Rightarrow\frac{S_6}{6}=\frac{S_5}{5}+d_1=-1-\frac{3}{2}\Rightarrow S_6=-15.$$

8. $0<\alpha<\pi$，$\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\sin(\alpha-\frac{\pi}{4})=$（　　）

A. $\frac{\sqrt{2}}{10}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{5}$　　C. $\frac{3\sqrt{2}}{10}$　　D. $\frac{7\sqrt{2}}{10}$

【答案】D

【解答】

$\because \cos\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，

$\therefore \cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1=-\frac{3}{5}$，

又$\because 0<\alpha<\pi$，

$\therefore \sin\alpha=\frac{4}{5}$，

则$\sin(\alpha-\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\alpha-\cos\alpha)=\frac{7\sqrt{2}}{10}$.

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分，在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的 0 分。

9. S_n为等比数列$\{a_n\}$前n项和，q为$\{a_n\}$公比，$q>0$，$S_3=7$，$a_3=1$，则（　　）

A. $q=\frac{1}{2}$　　B. $a_5=\frac{1}{9}$　　C. $S_5=8$　　D. $a_n+S_n=8$

【答案】AD

【解答】由已知条件

$$S_3=a_1+a_2+a_3=\frac{a_3}{q^2}+\frac{a_3}{q}+a_3=\frac{1}{q^2}+\frac{1}{q}+1=7\Rightarrow\frac{1}{q^2}+\frac{1}{q}-6=0\Rightarrow(\frac{1}{q}+3)(\frac{1}{q}-2)=0$$

又$q>0$，则$\frac{1}{q}=2\Rightarrow q=\frac{1}{2}$，

故$a_1=\frac{a_3}{q^2}=4, a_n=4\times(\frac{1}{2})^{n-1}=(\frac{1}{2})^{n-3}, S_n=8-(\frac{1}{2})^{n-3}$，

$a_5=a_3q^2=\frac{1}{4}, S_5=8-(\frac{1}{2})^2\neq 8, a_n+S_n=(\frac{1}{2})^{n-3}+8-(\frac{1}{2})^{n-3}=8$，

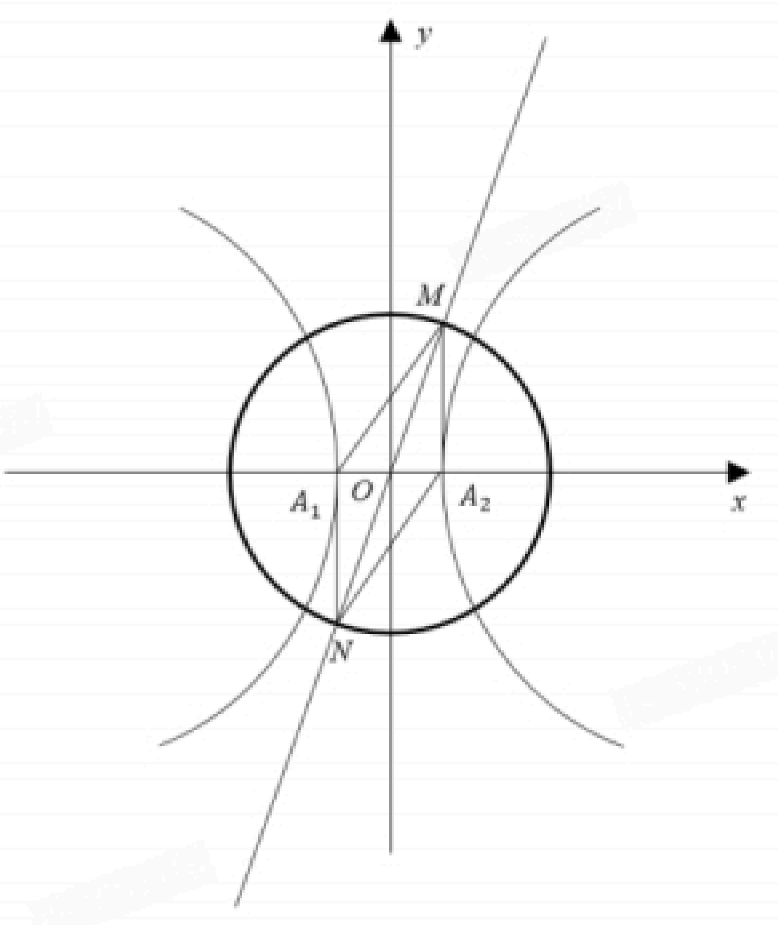
综上AD正确.

由对称性不妨取斜率为正的渐近线 $l_{MN}: y=\dfrac{b}{a}x$，

又 $MO=r=c$，则易知 $M(a,b)$，又 $A_1(-a,0)$，

$A_2(a,0)$，

则 $MA_2 \perp A_1A_2$，如图



$\angle A_1MA_2=\pi-\angle NA_1M=\dfrac{\pi}{6}$，A 选项正确；

则在 $Rt\triangle A_1MA_2$ 中，$|MA_1|=\sqrt{3}|MA_2|$，B 选项错误，

$\because \tan\angle A_1MA_2=\dfrac{2a}{b}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

则 $e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{1+\dfrac{b^2}{a^2}}=\sqrt{13}$，C 选项正确；

当 $a=\sqrt{2}$ 时，$S_{NA_1MA_2}=2\times\dfrac{1}{2}|MA_1|\cdot|MA_2|=2ab=8\sqrt{3}$，D 选项正确.

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12．$\vec{a}=(x,1)$，$\vec{b}=(x-1,2x)$，$\vec{a}\perp(\vec{a}-\vec{b})$ 则 $|\vec{a}|=$ ____.

【答案】$x=1$

【解答】$\vec{a}-\vec{b}=(1,1-2x)$，$\vec{a}\perp(\vec{a}-\vec{b})\Leftrightarrow\vec{a}\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0\Leftrightarrow x+1-2x=0\Rightarrow x=1$.

13．$x=2$ 是 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-a)$ 的极值点，则 $f(0)=$ ____ .

【答案】-4

【解答】$f'(x)=(x-2)(x-a)+(x-1)(x-a)+(x-1)(x-2)$，

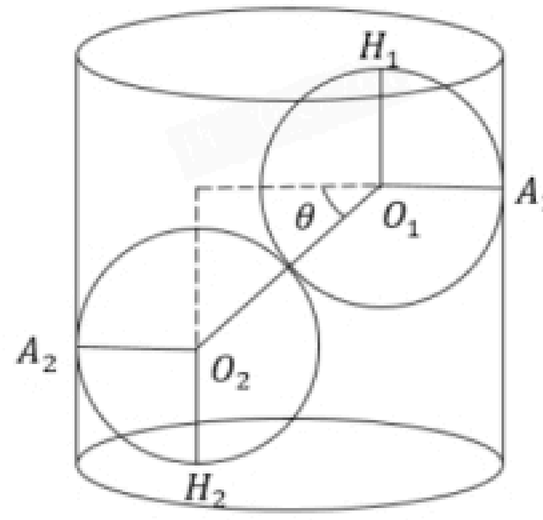
若 $x=2$ 为 $f(x)$ 的极值点，则 $f'(2)=2-a=0\Rightarrow a=2$.

$f(x)=(x-1)(x-2)^2\Rightarrow f(0)=-1\times4=-4$

14．一个底面半径为$4cm$，高为$9cm$的封闭圆柱形容器内有两个半径相等的铁球.则铁球半径的最大值为______cm

【答案】$\dfrac{5}{2}$

【解答】



设铁球半径为r，两铁球位置如图所示，

竖直方向有，$h=O_1H_1+O_1O_2\cdot\sin\theta+O_2H_2$，

即$9=2r+2r\sin\theta$，

水平方向有，$2R=A_1O_1+O_1O_2\cdot\cos\theta+A_2O_2$，

即$8=2r+2r\cos\theta$，

则$(9-2r)^2+(8-2r)^2=4r^2$

化简得：$4r^2-68r+145=0$

$(2r-29)(2r-5)=0$，

解得：$r=\dfrac{5}{2}$，$r=\dfrac{29}{2}$（舍）

故答案为：$\dfrac{5}{2}$

四、解答题：本题共5小题，共77分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15．（13分）$f(x)=\cos(2x+\varphi)(0\le\varphi<\pi),f(0)=\dfrac{1}{2}$

（1）求φ；

（2）$g(x)=f(x)+f(x-\dfrac{\pi}{6})$，求$g(x)$的值域和单调区间.

【解答】解：（1）$f(0)=\cos\varphi=\dfrac{1}{2}$，由$0\leqslant\varphi<\pi$，故$\varphi=\dfrac{\pi}{3}$；

（2）$f(x)=\cos(2x+\dfrac{\pi}{3})$，$f(x-\dfrac{\pi}{6})=\cos2x$，$g(x)=f(x)+f(x-\dfrac{\pi}{6})=\sqrt{3}\cos(2x+\dfrac{\pi}{6})$

故$g(x)$的值域为$\left[-\sqrt{3},\sqrt{3}\right]$，

令$2k\pi\leqslant2x+\dfrac{\pi}{6}\leqslant\pi+2k\pi$，解得$-\dfrac{\pi}{12}+k\pi\leqslant x\leqslant\dfrac{5\pi}{12}+k\pi$，

即 $g(x)$ 的单调递减区间为 $\left[-\frac{\pi}{12}+k\pi, \frac{5\pi}{12}+k\pi\right]$，$k \in \mathbf{Z}$

同理可得 $g(x)$ 的单调递增区间为 $\left[\frac{5\pi}{12}+k\pi, \frac{11\pi}{12}+k\pi\right]$，$k \in \mathbf{Z}$

16.（15 分）椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，长轴长为 4.

（1）求 C 的方程；

（2）过点 $(0,-2)$ 的直线 l 与 C 交于 A, B 两点，O 为坐标原点，若 $S_{\triangle OAB}=\sqrt{2}$，求 $|AB|$.

【解答】（1）$a=2$，$b=\sqrt{2}$，$c=\sqrt{2}$，椭圆方程为：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$；

（2）设 $l: y=kx-2$，点 $P\ (0,-2)$，点 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，

联立 $\begin{cases} \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1 \\ y=kx-2 \end{cases}$ 可得：$(2k^2+1)x^2-8kx+4=0$，其判别式为 $\Delta=32k^2-16$，

$x_1+x_2=\frac{8k}{2k^2+1}$，$x_1x_2=\frac{4}{2k^2+1}>0$（两根同号），

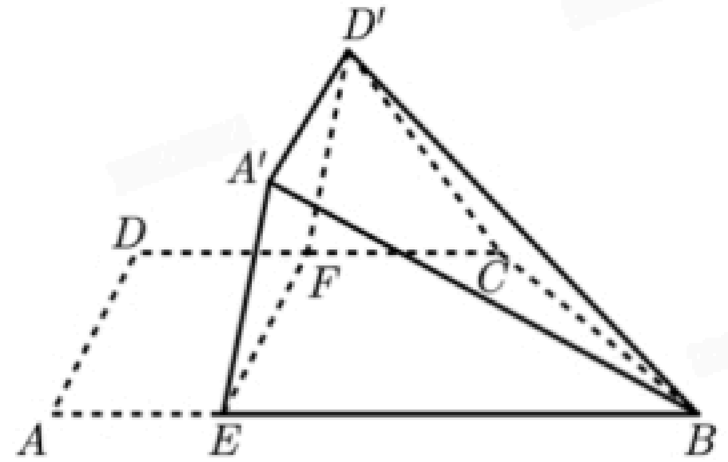
由 $\Delta>0$，可得 $k>\frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $k<-\frac{\sqrt{2}}{2}$，

$S_{\triangle OAB}=S_{\triangle OPB}-S_{\triangle OPA}=\frac{1}{2}\times 2|x_2|-\frac{1}{2}\times 2|x_1|=|x_2-x_1|=\frac{\sqrt{\Delta}}{2k^2+1}=\sqrt{2}$，

解得 $k^2=\frac{3}{2}$，

$|AB|=\sqrt{k^2+1}|x_2-x_1|=\sqrt{\frac{5}{2}}\times\sqrt{2}=\sqrt{5}$.

17.（15 分）. 如图，四边形 $ABCD$ 中，$AB \parallel CD$，$\angle DAB=90^\circ$，F 为 CD 中点，E 在 AB 上，$EF \parallel AD$，$AB=3AD, CD=2AD$。将四边形 $EFDA$ 沿 EF 翻折至四边形 $EFD'A'$，使得面 $EFD'A'$ 与面 $EFCB$ 所成的二面角为 60°



（1）证明：$A'B \parallel$ 平面 $CD'F$；

（2）求面 BCD' 与面 $EFD'A'$ 所成二面角的正弦值.

【解答】(1) 由 $EB//FC$， $A'E//D'F$，可得平面 $A'EB$ // 平面 $D'FC$，

又由 $A'B\subset$ 平面 $A'EB$

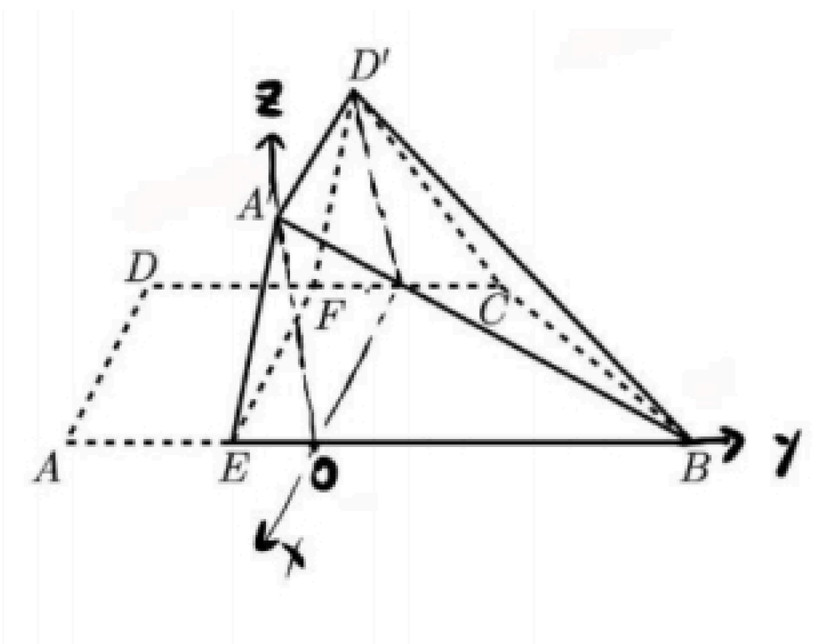
故 $A'B$ // 平面 $D'FC$；

(2) 由 $EF\perp A'E$ 且 $EF\perp EB$，可知 $A'EB$ 即为二面角的平面角，为60°

不妨设 $AD=1$，在平面 $A'EB$ 内，由点 A' 作 EB 垂线，垂足为O，

可证 $A'O\perp$ 底面 $EBCF$， $EO=\dfrac{1}{2}$， $OB=\dfrac{3}{2}$

如图建系，



$\overrightarrow{FE}=(1,0,0)$， $\overrightarrow{EA'}=(0,\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2})$，设平面 $EFD'A'$ 的法向量为$\overrightarrow{n_1}=(x_1,y_1,z_1)$

则有$\begin{cases} x_1=0 \\ \dfrac{1}{2}y_1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}z_1=0 \end{cases}$，取 $y_1=-\sqrt{3}$， $\overrightarrow{n_1}=(0,-\sqrt{3},1)$；

$\overrightarrow{CB}=(1,1,0)$ ， $\overrightarrow{D'B}=(1,\dfrac{3}{2},-\dfrac{\sqrt{3}}{2})$ ， 设 平 面 BCD' 的 法 向 量 为 $\overrightarrow{n_2}=(x_2,y_2,z_2)$ ， 则 有

$\begin{cases} x_2+y_2=0 \\ x_1+\dfrac{3}{2}y_1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}z_1=0 \end{cases}$，取 $y_2=\sqrt{3}$，则$\overrightarrow{n_2}=(-\sqrt{3},\sqrt{3},1)$

即平面 BCD' 与平面 $EFD'A'$ 成角θ，则有$\cos\theta=\left|\dfrac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}|\times|\cdot\overrightarrow{n_2}|}\right|=\dfrac{\sqrt{7}}{7}$，故$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{42}}{7}$.

18.（17 分） $f(x)=\ln(1+x)-x+\dfrac{1}{2}x^2-kx^3,0<k<\dfrac{1}{3}$.

(1) 证明： $f(x)$ 在$(0,+\infty)$存在唯一极值点和唯一零点；

(2) 设 x_1， x_2 为 $f(x)$ 在$(0,+\infty)$的极值点和零点；

（i）$g(t)=f(x_1+t)-f(x_1-t)$。证明：$g(t)$在$\left(0,x_1\right)$单调递减.

（ii）比较$2x_1$与x_2的大小，并证明.

【解答】(1）证明：因为$f(x)=\ln(1+x)-x+\dfrac{1}{2}x^2-kx^3$，$k\in(0,\dfrac{1}{3})$，

所以$f'(x)=\dfrac{1}{1+x}-1+x-3kx^2$

$=\dfrac{1-1-x+x+x^2-3kx^2-3kx^3}{1+x}$

$=\dfrac{-3kx^2}{1+x}(x+1-\dfrac{1}{3k})$，

当$x>0$时，令$f'(x)=0$，解得$x=\dfrac{1}{3k}-1>0$，

所以当$0<x<\dfrac{1}{3k}-1$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增；

当$x>\dfrac{1}{3k}-1$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减，

所以$x=\dfrac{1}{3k}-1$是$f(x)$在$(0,+\infty)$上唯一的极值点，是极大值点.

又因为$f(\dfrac{1}{3k}-1)>f(0)=0$，$f(\dfrac{1}{2k})=\ln(1+\dfrac{1}{2k})-\dfrac{1}{2k}<0$，

所以$\exists x_2\in(\dfrac{1}{3k}-1,\dfrac{1}{2k})$，$f(x_2)=0$，

即x_2是$f(x)$在$(0,+\infty)$上唯一的零点；

（2）解：（i）因为$g(t)=f(x_1+t)-f(x_1-t)$，

所以$g'(t)=f'(x_1+t)+f'(x_1-t)$

$=\dfrac{-3k(x_1+t)^2}{1+x_1+t}(x_1+t-x_1)+\dfrac{-3k(x_1-t)^2}{1+x_1-t}(x_1-t-x_1)$

$=3kt\left[\dfrac{(x_1-t)^2}{1+x_1+t}+\dfrac{(x_1+t)^2}{1+x_1-t}\right]$

$=\dfrac{6kt^2(t^2-x_1{}^2-2x_1)}{(1+x_1)^2-t^2}$，

因为$t\in(0,x_1)$，所以$t^2-x_1{}^2-2x_1<0$，$(1+x_1)^2-t^2>0$，

所以$g'(t)=\dfrac{6kt^2(t^2-x_1{}^2-2x_1)}{(1+x_1)^2-t^2}<0$，