

绵阳市高中 2023 级第一次诊断性考试

数 学

注意事项：

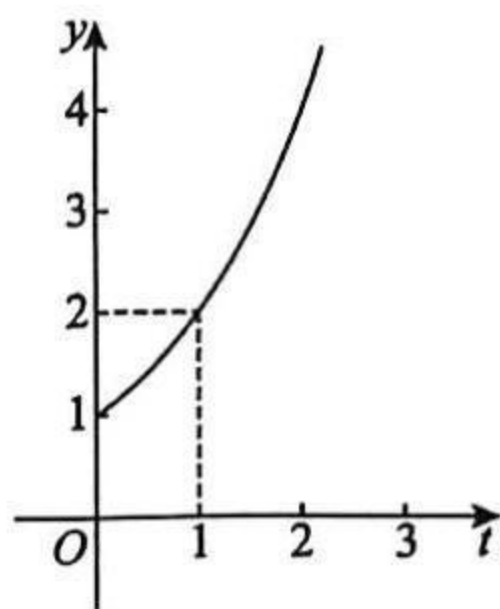
1. 答卷前，考生务必将自己的班级、姓名、考号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。写在本试卷上无效。
3. 回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
4. 考试结束后，将答题卡交回。

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x | x > 1\}$ ， $B = \{x | x^2 \leq 4\}$ ，则 $A \cap B =$
A. $[2, +\infty)$ B. $(1, 2]$ C. $[1, 2)$ D. $\emptyset$
2. 设命题 $p: \exists x \in \mathbf{R}, x = \sin x$ ，则 $\neg p:$
A. $\forall x \in \mathbf{R}, x = \sin x$ B. $\exists x \in \mathbf{R}, x \neq \sin x$
C. $\exists x \in \mathbf{R}, x = \sin x$ D. $\forall x \in \mathbf{R}, x \neq \sin x$
3. 已知 a, b, c 均为实数，则下列说法正确的是
A. 若 $a > b$ ，则 $ac > bc$ B. 若 $a > b$ ，则 $c - a > c - b$
C. 若 $b < a < 0$ ，则 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ D. 若 $a > b, c \neq 0$ ，则 $\frac{a}{c^2} < \frac{b}{c^2}$
4. 下列函数中，是偶函数，且在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减的是
A. $y = x^2$ B. $y = x^{-2}$ C. $y = 2^x$ D. $y = \log_2 x$
5. 已知 $x + \log_2 3 = 0$ ，则 $2^x + 2^{-x} =$
A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{10}{3}$ C. $2\sqrt{3}$ D. 3
6. 已知 α 为第二象限角，且 $\tan(\alpha - \pi) = k$ ，则 $\sin \alpha =$
A. $\frac{-k}{\sqrt{k^2 + 1}}$ B. $\frac{k}{\sqrt{k^2 + 1}}$ C. $\frac{-1}{\sqrt{k^2 + 1}}$ D. $\frac{1}{\sqrt{k^2 + 1}}$

7. 如图, 某池塘里浮萍的面积 y (单位: m^2) 与时间 t (单位: 周) 的关系为 $y = a^t$ (a 为常数), 则下列说法中正确的是

- A. 浮萍每周的面积与上周面积之比不为定值
- B. $t=4$ 时, 浮萍面积就会超过 20m^2
- C. 浮萍每周增加的面积都相等
- D. 若浮萍面积为 2m^2 , 3m^2 , 6m^2 时所对应的时间分别是 t_1 , t_2 , t_3 , 则 $t_1 + t_2 = t_3$



8. 已知函数 $f(x) = x^m + \log_n x$ ($m > 0$, $n > 0$ 且 $n \neq 1$), 若 $f(x)$ 在 $x=2$ 处取得极值为 1, 则

- A. $m \ln n + 1 = 0$
- B. $m(\ln n - \ln 2) - 1 = 0$
- C. $m(\ln n - \ln 2) + 1 = 0$
- D. $m(\ln \sqrt{n} - \ln 2) + 1 = 0$

二、选择题: 本题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分, 部分选对的得部分分, 有选错的得 0 分.

9. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数 $f(x)$, 满足 $f(x+2) - f(x) = f(1)$, 当 $x \in (0, 1)$ 时,

$f(x) = \ln x$, 则

- A. $f(1) = 0$
- B. $f(-\frac{5}{2}) = \ln 2$
- C. $f(\frac{1}{2}) > f(-\frac{5}{3})$
- D. 若 $f(0) = 1$, 则 $\sum_{i=1}^{20} f(i) = 10$

10. 已知数列 $\{a_n\}$ 共有 5 项, 前三项成等比数列, 后三项成等差数列, 且 $a_3 = 80$, $a_2 + a_4 = 136$,

$a_1 + a_5 = 132$. 若 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 则下列选项可能正确的是

- A. $a_1 = 180$
- B. a_3 为最大项
- C. $S_3 = 140$
- D. 数列 a_3, a_4, a_5 的公差为 64

11. 已知函数 $f_k(x) = \cos^{2k} x - \sin^{2k} x$, $g_k(x) = \cos^{2k} x + \sin^{2k} x$, $k \geq 2$ 且 $k \in \mathbf{N}^*$, 则

- A. 函数 $f_k(x)$ 的一个周期为 π
- B. 函数 $f_2(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上单调递减
- C. 曲线 $y = f_k(x)$ 关于 $x = \frac{\pi}{4}$ 对称
- D. 函数 $f_k(x)$ 与函数 $g_k(x)$ 的最大值相等

三、填空题：本大题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = \sin \frac{(n+1)\pi}{4}$ ，则 $a_2 =$ _____.

13. 若 $a > 0$, $b > 0$, $a+b=2$, 则 $a^2 + b^2$ 的最小值为_____.

14. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}-2, & x \geq 0, \\ -x^2, & x < 0, \end{cases}$ 则使不等式 $f(x) > f(x^2)$ 成立的 x 的取值范围是_____.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (13 分)

已知函数 $f(x) = \cos(x - \varphi)$ ，其中 $\varphi \in (0, \pi)$ ，且 $f(\pi) = -\frac{1}{2}$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的解析式；

(2) 将函数 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位后得到函数 $g(x)$ 的图象，若

$h(x) = 2f(x) \cdot g(x)$ ，求函数 $h(x)$ 的单调递增区间.

16. (15 分)

设函数 $f(x) = x|x+a| - b$ ，其中 $a, b \in \mathbf{R}$.

(1) 若函数 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，求函数 $f(x)$ 的解析式；

(2) 若 $b = a^2 + 1$ ，当 $x \geq 1$ 时， $f(x) > 0$ ，求实数 a 的取值范围.

17. (15 分)

已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且 $S_4 = 6S_2 - 8$ ， $a_{2n} = 2a_n + \sqrt{3} - 1$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 试探究：在数列 $\{a_n\}$ 中取三个不同的项，能否构成等比数列？请说明理由.

18. (17 分)

已知函数 $f(x) = -x^3 + ax^2 + x$ 有两个不同的极值点 x_1, x_2 ($x_1 < x_2$).

(1) 求证：函数 $f(x)$ 有 3 个相异零点；

(2) 若 $f(x_1) + f(x_2) = \frac{22}{27}$ ，求实数 a 的值；

(3) 若 $f(m) = f(x_2)$ ($m \neq x_2$)，求实数 m 的最大值.

19. (17分)

(1) 已知 $a \geq \frac{1}{2}$, 函数 $f(x) = (1 - ax)(e^x - 1) - x$. 证明: 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) \leq 0$;

(2) 设函数 $g(x) = \ln(ex)$ 与 $h(x) = e^{x-1}$ 的图象分别为 C_1, C_2 . 点 $A_n(a_n, \ln(ea_n))$ 在 C_1 上, 且 $a_n < 1$, C_1 在点 A_n 处的切线交 C_2 于点 $B_n(b_n, e^{b_n-1})$, $b_n < 1$. C_2 在点 B_n 处的切线交 C_1 于 A_{n+1} , 由此构造出点列 $A_n, B_n (n \in \mathbf{N}^*)$. 已知 $A_1(\frac{1}{2}, \ln \frac{e}{2})$.

(i) 证明: $a_{n+1} > a_n$;

(ii) 求 $[\sum_{i=1}^n a_i]$, 其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.